Diagnostische toets

bladzijde 40

1 a De afkoelingswet van Newton geeft $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - 18)$.

Op $t = 1$ is $T \approx \frac{70 + 60}{2} = 65$ °C en $\frac{dT}{dt} \approx \frac{60 - 70}{2} = -5$ °C per minuut.

Dit geeft $-5 \approx c \cdot (65 - 18)$, dus $c \approx \frac{-5}{47} \approx -0{,}106$.

Dus $\frac{dT}{dt} = -0{,}106(T - 18)$ met $T(0) = 70$ °C en t in minuten.

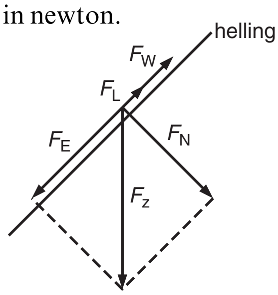
b De afkoelingswet van Newton geeft $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - 18)$.

Op $t = 60$ is $T \approx \frac{70 + 60}{2} = 65$ °C en $\frac{dT}{dt} \approx \frac{60 - 70}{120} = -\frac{1}{12}$ °C/s.

Dit geeft $-\frac{1}{12} \approx c \cdot (65 - 18)$, dus $c \approx \frac{-\frac{1}{12}}{47} \approx -0{,}00177$.

Dus $\frac{dT}{dt} = -0{,}00177(T - 18)$ met $T(0) = 70$ °C en t in seconden.

2 a F_L is de luchtweerstand in newton en F_W is de wrijvingsweerstand in newton.
Resulterende kracht $F_R = F_E - F_L - F_W = 755 - 0{,}4v^2 - 10v$.



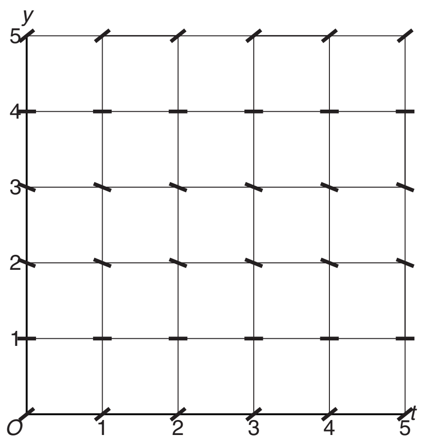
$F = m \cdot a$ geeft $755 - 0{,}4v^2 - 10v = 110 \cdot \frac{dv}{dt}$.

Dus $\frac{dv}{dt} = 6{,}86 - 0{,}00364v^2 - 0{,}0909v$ met $v(0) = 0$ m/s en t in seconden.

b $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $6{,}86 - 0{,}00364v^2 - 0{,}0909v = 0$
Voer in $y_1 = 6{,}86 - 0{,}00364x^2 - 0{,}0909x$.
De optie zero of ROOT geeft $x \approx 32{,}68$.
De grenswaarde van zijn snelheid is ongeveer 32,68 m/s ≈ 118 km/uur.

3 a

y	0	1	2	3	4	5
$\frac{dy}{dt}$	0,8	0	−0,4	−0,4	0	0,8



b Stel $l: y = at + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dt}\right]_{(2,2)} = -0{,}4$.

$\left.\begin{array}{l} l: y = -0{,}4t + b \\ \text{door } (2,2) \end{array}\right\}$ $2 = -0{,}4 \cdot 2 + b$

$2 = -0{,}8 + b$

$2{,}8 = b$

Dus $l: y = -0{,}4t + 2{,}8$.

c $rc_k = -0{,}45$ dus $\dfrac{dy}{dt} = -0{,}45$ ofwel $0{,}2y^2 - y + 0{,}8 = -0{,}45$

$0{,}2y^2 - y + 1{,}25 = 0$

$y^2 - 5y + 6{,}25 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6{,}25 = 0$

$y = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

In het raakpunt B geldt $y = -0{,}45t + 7$ } $2{,}5 = -0{,}45t + 7$

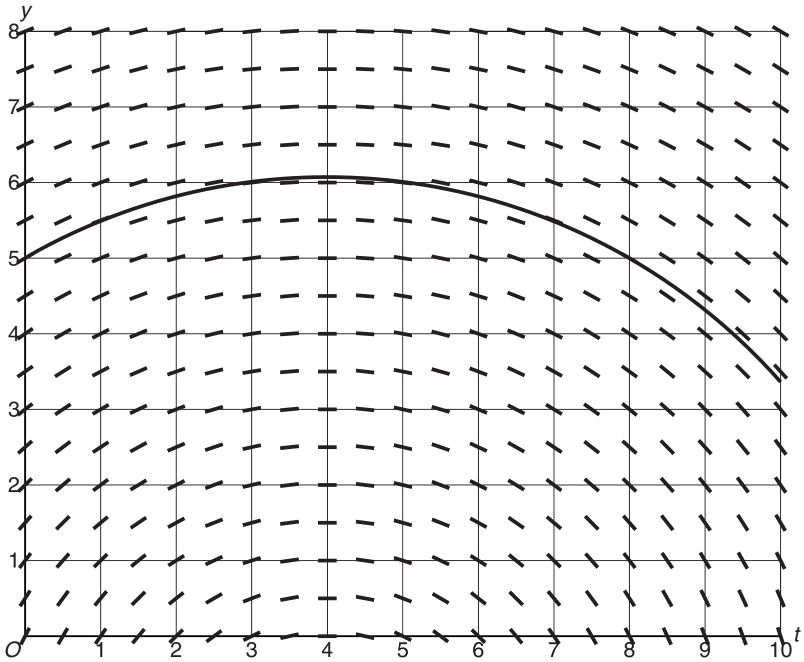
$0{,}45t = 4{,}5$

$t = 10$

Dus $B(10; 2{,}5)$.

4 a $M(4, -2)$

b



c De oplossingskromme door $B(0, 6)$ is een cirkel met straal MB.
$MB^2 = (4 - 0)^2 + (-2 - 6)^2 = 80$, dus $MB = \sqrt{80}$.
Punt $C(4, a)$ ligt ook op deze cirkel dus $MC = \sqrt{80}$.

Dit geeft $\sqrt{(4-4)^2 + (-2-a)^2} = \sqrt{80}$

$\sqrt{(-2-a)^2} = \sqrt{80}$

$(-2-a)^2 = 80$

$-2 - a = \sqrt{80} \lor -2 - a = -\sqrt{80}$

$-a = 2 + \sqrt{80} \lor -a = 2 - \sqrt{80}$

$a = -2 - \sqrt{80} \lor a = -2 + \sqrt{80}$

5 a De grenswaarde wordt bereikt als $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0$.

Dit geeft $0{,}03A - 0{,}00014A^2 = 0$

$A(0{,}03 - 0{,}00014A) = 0$

$A = 0 \vee 0{,}03 - 0{,}00014A = 0$

$A = 0 \vee 0{,}00014A = 0{,}03$

$A = 0 \vee A \approx 214{,}3$

De grenswaarde is ongeveer 214,3 miljoen inwoners.

b Voer in $u_n = u_{n-1} + (0{,}03u_{n-1} - 0{,}00014u_{n-1}^2) \cdot 1$ met $u_0 = 5{,}5$.
Je krijgt $u_{110} \approx 87{,}5$, dus in 2010 zijn er ongeveer 87,5 miljoen inwoners.

c $u_{150} \approx 149{,}3$ en $u_{151} \approx 150{,}6$
Dus in het jaar 2050 zijn er voor het eerst ongeveer 150 miljoen inwoners.

6 a De resulterende kracht $F_R = 110 - 10 - c \cdot v^2 = 100 - cv^2$, waarbij c de evenredigheidsconstante is.

$F = m \cdot a$ geeft $100 - cv^2 = 11{,}3 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Dus $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8{,}85 - 0{,}0885cv^2$ met $v(0) = 20$ m/s en t in seconden.

b De grenswaarde van de snelheid is 5 m/s dus $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ voor $v = 5$.

Dit geeft $8{,}85 - 0{,}0885c \cdot 5^2 = 0$

$2{,}2125c = 8{,}85$

$c = 4$

Dus $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8{,}85 - 0{,}354v^2$ met $v(0) = 20$ m/s en t in seconden.

Voer in $u_n = u_{n-1} + (8{,}85 - 0{,}354u_{n-1}^2) \cdot 0{,}05$ met $u_0 = 20$.
Je krijgt $u_{20} \approx 5{,}1$, dus na 1 seconde is de snelheid ongeveer 5,1 m/s.

7 Substitutie van $y = -1 + \sqrt{3t+4}$ in $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2y+2}$ geeft

$$\frac{\mathrm{d}(-1 + \sqrt{3t+4})}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2(-1 + \sqrt{3t+4}) + 2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(-1 + (3t+4)^{\frac{1}{2}}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{-2 + 2\sqrt{3t+4} + 2}$$

$$\tfrac{1}{2}(3t+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3t+4}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3t+4}} = \frac{3}{2\sqrt{3t+4}}$$

Dit klopt voor elke t, dus $y = -1 + \sqrt{3t+4}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

8 a $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 1 = -2(y - \frac{1}{2})$ geeft $y = \frac{1}{2} + a \cdot e^{-2t}$
door $(\frac{1}{2}, 2)$

$$2 = \tfrac{1}{2} + a \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$1\tfrac{1}{2} = a \cdot e^{-1}$$
$$a = 1\tfrac{1}{2}e$$

Dus $y = \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\ e \cdot e^{-2t}$ ofwel $y = \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\ e^{-2t+1}$.

b $\dfrac{dy}{dt} = 6y - 2y^2 = 2y(3 - y)$ geeft

$y = \dfrac{3}{1 + a \cdot 3 \cdot e^{-2 \cdot 3t}} = \dfrac{3}{1 + 3a \cdot e^{-6t}}$
door $(\frac{1}{2}, 2)$

$$2 = \frac{3}{1 + 3a \cdot e^{-6 \cdot \frac{1}{2}}}$$
$$2 = \frac{3}{1 + 3a \cdot e^{-3}}$$
$$2 + 6a \cdot e^{-3} = 3$$
$$6a \cdot e^{-3} = 1$$
$$a = \tfrac{1}{6}\ e^{3}$$

Dus $y = \dfrac{3}{1 + 3 \cdot \frac{1}{6}\ e^{3} \cdot e^{-6t}}$ ofwel $y = \dfrac{3}{1 + \frac{1}{2}\ e^{-6t+3}}$.

c $\dfrac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y$ geeft $y = a \cdot e^{\frac{1}{2}t}$
door $(\frac{1}{2}, 2)$

$$2 = a \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$
$$2 = a \cdot e^{\frac{1}{4}}$$
$$a = 2e^{-\frac{1}{4}}$$

Dus $y = 2\ e^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{1}{2}t}$ ofwel $y = 2\ e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}}$.