Bij opgave 47 kun je de volgende redenering houden. Zie de figuur hiernaast.

Stel $PR = p$.

$y = p$ geeft

$10 - 2x_Q = p$ en $6 - 1{,}5x_p = p$

$2x_Q = 10 - p$ $\quad$ $1{,}5x_P = 6 - p$

$x_Q = 5 - \frac{1}{2}p$ $\quad$ $x_P = 4 - \frac{2}{3}p$

Dus $RQ = (5 - \frac{1}{2}p) - (4 - \frac{2}{3}p) = 1 + \frac{1}{6}p$

$\text{rc}_{PQ} = \frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{p}{1 + \frac{1}{6}p} = \frac{1}{2}$

$2p = 1 + \frac{1}{6}p$

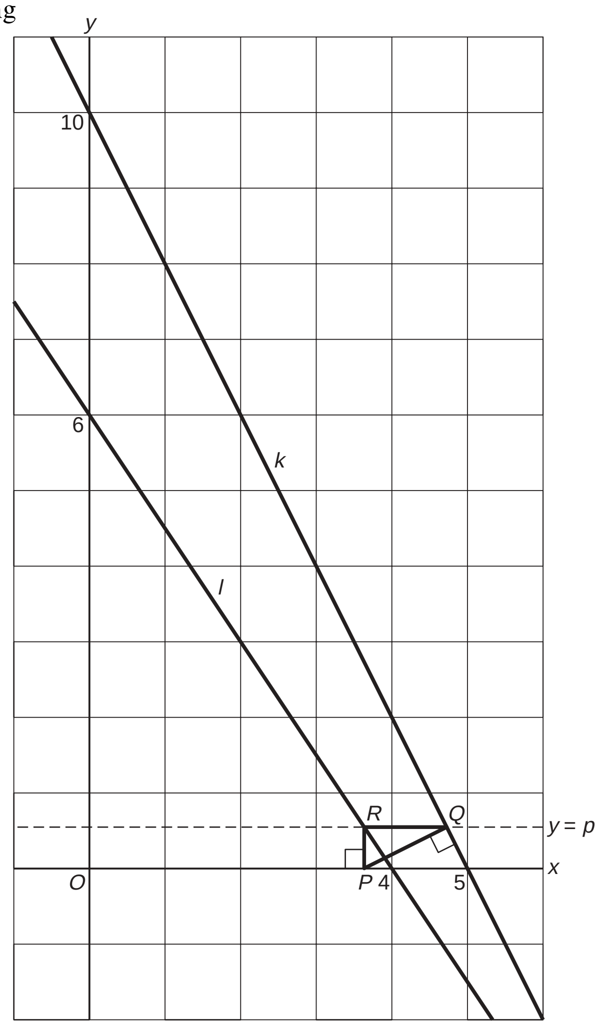
$12p = 6 + p$

$11p = 6$

$p = \frac{6}{11}$

$x_P = 4 - \frac{2}{3}p = 4 - \frac{4}{11} = \frac{40}{11}$

Er geldt dus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{40}{11}$.



Diagnostische toets

bladzijde 136

1 a $u_{n+1} = -0{,}6u_n + 10$ met $u_0 = 100$.

De rij is van de vorm $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ en $|a| = 0{,}6 < 1$.

De rij is convergent.

Los op: $x = -0{,}6x + 10$

$1{,}6x = 10$

$x = 6{,}25$

De grenswaarde is 6,25.

b $u_{n+1} = 1{,}5u_n - 5$ met $u_0 = 100$.

De rij is van de vorm $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ en $|a| = 1{,}5 > 1$.

$u_1 = 145 \neq u_0$, dus u_0 is niet het dekpunt.

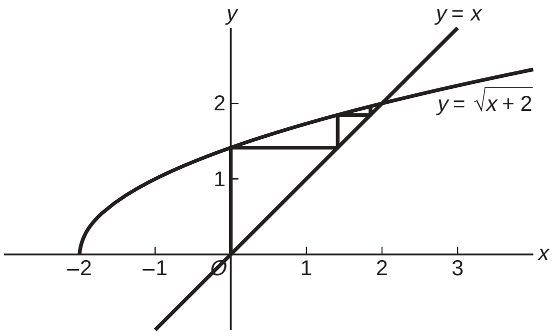
De rij is divergent, er is geen grenswaarde.

c $u_n = 1{,}5u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 10$.

$u_1 = 1{,}5 \cdot 10 - 5 = 10$, $u_2 = 1{,}5 \cdot 10 - 5 = 10$, ...

De rij is convergent. De grenswaarde is 10.

2 a



Aan de webgrafiek zie je dat de rij $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ met $u_0 = 0$ convergeert.

$x = \sqrt{x+2}$ geeft
$$\begin{aligned}
&x^2 = x + 2\\
&x^2 - x - 2 = 0\\
&(x-2)(x+1) = 0\\
&x = 2 \vee x = -1\\
&\text{vold.} \quad\ \ \text{v.n.}
\end{aligned}$$

De rij convergeert naar het dekpunt 2, dus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

b Voer in $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ met $u_0 = 0$.
De optie table geeft $u_8 = 1{,}99985$
$u_9 = 1{,}99996$
Dus vanaf $n = 8$ is $|u_n - 2| < 10^{-4}$.

3 a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n}{4 - 2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{2}{n}}{\frac{4}{n^2} - 2} = \dfrac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$

b $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 4n + 100}{n^2(1+\sqrt{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 4n + 100}{n^2 + n^{2\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{n^{1\frac{1}{2}}} + \frac{100}{n^{2\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + 1} = \dfrac{0+0+0}{0+1} = 0$

c $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-2)^2}{(n^2-1)(n^2+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 4n^2 + 4}{n^4 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^4}}{1 - \frac{1}{n^4}} = \dfrac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$

d $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (3 + (2n+1))}{(2n-1)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2n}{4n^2 - 1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{n}}{4 - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1+0}{4-0} = \frac{1}{4}$

4 a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{2}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{(3^2)^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

b $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{n-1}{1+2n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 2}\right) = \cos\left(\dfrac{0-0}{0+2}\right) = \cos(0) = 1$

c $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sin\left(\dfrac{n-1}{1+2n}\pi\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sin\left(\dfrac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 2}\pi\right)} = \sqrt{\sin\left(\dfrac{1-0}{0+2}\pi\right)} = \sqrt{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{1} = 1$

d $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{1+n^2}{1+4n^2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{n^2} + 4}}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{0+1}{0+4}}\right) = \sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$

5 a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}}{1{,}01^n} = 0$

b $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi} = 1$

c $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^5)}{\sqrt[5]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\ln(n)}{\sqrt[5]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 5 \cdot \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{5}}} = 5 \cdot 0 = 0$

d $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{-n} \cdot n^{\mathrm{e}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^n}\right) = 0$

6 a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{-1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

b $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2n}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

bladzijde 137

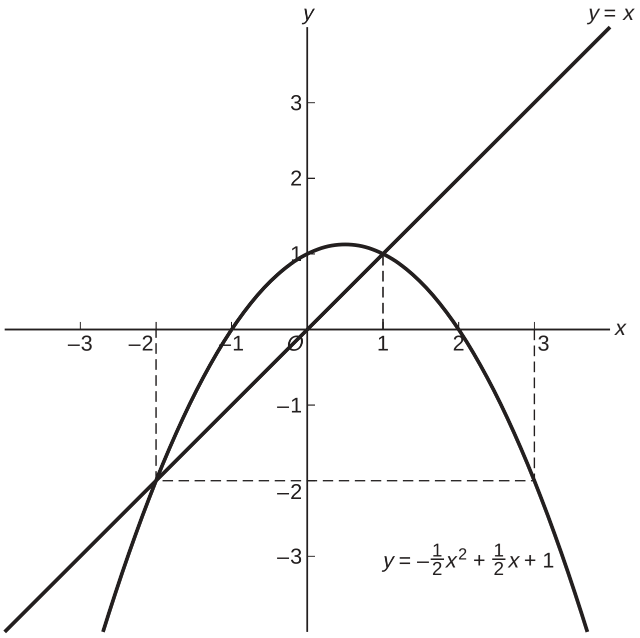
7 a $f(d) = d$ geeft $-\frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d + 1 = d$

$d^2 - d - 2 = -2d$

$d^2 + d - 2 = 0$

$(d+2)(d-1) = 0$

$d = -2 \ \vee \ d = 1$



$f(x) = -2$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = -2$

$x^2 - x - 2 = 4$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3 \ \vee \ x = -2$

$c < -2$ geeft een divergente rij

$c = -2$ geeft de constante rij $-2, -2, -2, \ldots$

$-2 < c < 3$ geeft een rij die naar 1 convergeert

$c = 3$ geeft de rij $3, -2, -2, -2, \ldots$

$c > 3$ geeft een divergente rij

Dus voor $-2 < c < 3$ heeft u_n een positieve grenswaarde.

b Zie de figuur bij a.
$0 < c < 2$ geeft alleen positieve termen.
$c = 2$ geeft de rij $2, 0, 1, \ldots$ en dus niet alle termen positief
$c > 2$ geeft $u_1 < 0$
Dus voor $0 < c < 2$ zijn alle termen van u_n positief.

c Zie de figuur bij a.
$c < -2$ geeft een monotoon dalende rij
$c = -2$ geeft een constante rij.
$-2 < c < 3$ geeft rijen met grenswaarde 1, waarbij de rij óf stijgend is, óf uiteindelijk afwisselend boven en onder 1 zit.
$c = 3$ geeft de rij $3, -2, -2, -2, \ldots$
$c > 3$ geeft een monotoon dalende rij
Voor $c < -2 \vee c > 3$ is u_n monotoon dalend.

8 a Noem het snijpunt van P_nQ met de x-as A.
$P_n(x_n, 2 - x_n^2)$; $A(x_{n+1}, 0)$ en $Q(2, -2)$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rc}_{P_nQ} = \mathrm{rc}_{AQ} = \dfrac{-2-0}{2-x_{n+1}} = \dfrac{-2}{2-x_{n+1}} \\[2ex] \mathrm{rc}_{P_nQ} = \mathrm{rc}_{AP_n} = \dfrac{2-x_n^2-0}{x_n - x_{n+1}} = \dfrac{2-x_n^2}{x_n-x_{n+1}} \end{array}\right\}$$

$$\frac{-2}{2-x_{n+1}} = \frac{2-x_n^2}{x_n-x_{n+1}} \text{ ofwel } \frac{2}{2-x_{n+1}} = \frac{2-x_n^2}{x_{n+1}-x_n}$$

Dit geeft
$$\begin{aligned} 2x_{n+1} - 2x_n &= (2-x_{n+1})(2-x_n^2) \\ 2x_{n+1} - 2x_n &= 4 - 2x_n^2 - 2x_{n+1} + x_{n+1} \cdot x_n^2 \\ 4x_{n+1} - x_{n+1} \cdot x_n^2 &= 4 + 2x_n - 2x_n^2 \\ (4 - x_n^2)x_{n+1} &= 4 + 2x_n - 2x_n^2 \\ x_{n+1} &= \frac{4 + 2x_n - 2x_n^2}{4 - x_n^2} \end{aligned}$$

b $c = 0$ geeft als grenswaarde de x-coördinaat van het rechter snijpunt van de grafiek van $y = 2 - x^2$ met de x-as, dus $\sqrt{2}$.
Dus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

9 a
$AP_n = x_n$ dus $BP_n = 12 - x_n$
$BP_n = 12 - x_n$ dus $BQ_n = \frac{1}{4}(12 - x_n) = 3 - \frac{1}{4}x_n$
$BQ_n = 3 - \frac{1}{4}x_n$ dus $CQ_n = 6 - (3 - \frac{1}{4}x_n) = 3 + \frac{1}{4}x_n$
$CQ_n = 3 + \frac{1}{4}x_n$ dus $CR_n = \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{4}x_n) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x_n$
$CR_n = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x_n$ dus $DR_n = 12 - (1\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x_n) = 10\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x_n$
$DR_n = 10\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x_n$ dus $DS_n = \frac{1}{4}(10\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x_n) = \frac{21}{8} - \frac{1}{32}x_n$
$DS_n = \frac{21}{8} - \frac{1}{32}x_n$ dus $AS_n = 6 - (\frac{21}{8} - \frac{1}{32}x_n) = \frac{27}{8} + \frac{1}{32}x_n$
Dus $x_{n+1} = AP_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{27}{8} + \frac{1}{32}x_n) = \frac{27}{16} + \frac{1}{64}x_n = 1\frac{11}{16} + \frac{1}{64}x_n$.

b De rij is van de vorm $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ en $|a| = \frac{1}{64} < 1$, dus de rij convergeert.
Voor de grenswaarde g geldt $g = 1\frac{11}{16} + \frac{1}{64}g$ geeft $\frac{63}{64}g = \frac{27}{16}$
$g = 1\frac{5}{7}$

Dus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1\frac{5}{7}$.

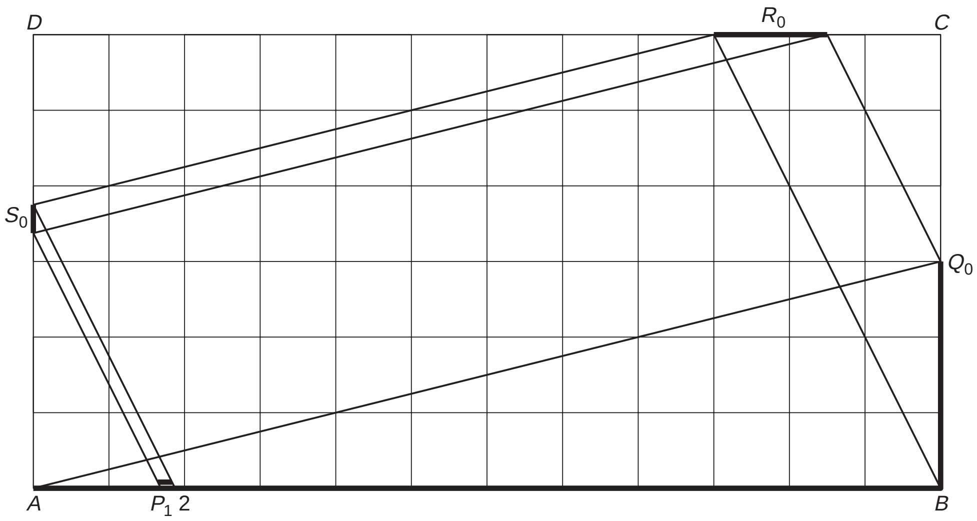
c $x_{n+1} = 2$ geeft $\frac{27}{16} + \frac{1}{64} x_n = 2$

$$\frac{1}{64} x_n = \frac{5}{16}$$

$$x_n = 20$$

Omdat $AB = 12$, kan x_n maximaal 12 zijn en dus kan $x_n = 20$ niet voorkomen.
Maar dan kan $x_{n+1} = 2$ dus ook niet voorkomen.
Er bestaat dus geen x_0 zo, dat een van de andere termen van de rij gelijk is aan 2.

ALTERNATIEVE UITWERKING



P_0 ligt op AB. Dit heeft tot gevolg dat Q_0; R_0, S_0 en P_1 op de aangegeven lijnstukken liggen.
Je kunt dus niet uitkomen op $x_n = 2$.