c Substitutie van $f_n = p \cdot a^n + q \cdot b^n$ in $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ geeft
$p \cdot a^{n+2} + q \cdot b^{n+2} = p \cdot a^{n+1} + q \cdot b^{n+1} + p \cdot a^n + q \cdot b^n$
$p \cdot a^{n+2} - p \cdot a^{n+1} - p \cdot a^n + q \cdot b^{n+2} - q \cdot b^{n+1} - q \cdot b^n = 0$
$p \cdot a^n(a^2 - a - 1) + q \cdot b^n(b^2 - b - 1) = 0$

d Omdat $p \neq 0$, $q \neq 0$ en uiteraard $a \neq 0$ en $b \neq 0$ kan de laatste regel van c alleen voor elke waarde van n juist zijn als zowel $a^2 - a - 1 = 0$ en $b^2 - b - 1 = 0$.

e Uit $a^2 - a - 1 = 0$ en $b^2 - b - 1 = 0$ volgt met behulp van de *abc*-formule

$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ en $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Omdat $a > b$ kan alleen $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ en $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

f Uit e volgt $f_n = p \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + q \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$f_0 = 0$ geeft $0 = p \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 + q \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0$
$0 = p + q$
$q = -p$

g Uit f volgt $f_n = p \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - p \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$f_1 = 1$ geeft $1 = p \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - p \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
$1 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p\sqrt{5} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p\sqrt{5}$
$1 = p\sqrt{5}$
$p = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Dit geeft $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

h $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ en de waarden van f_2 tot en met f_{10} zijn dezelfde als de bij a gevonden waarden.

Diagnostische toets

bladzijde 68

1 $u_2 = 2$ geeft $u_3 = \frac{-8}{2 - 2} = \frac{-8}{0}$ is niet gedefinieerd.

$u_2 = 2$ geeft $2 = \frac{-8}{u_1 - 2}$
$2(u_1 - 2) = -8$
$2u_1 - 4 = -8$
$2u_1 = -4$
$u_1 = -2$

$u_1 = -2$ geeft $-2 = \frac{-8}{u_0 - 2}$
$-2(u_0 - 2) = -8$
$-2u_0 + 4 = -8$
$-2u_0 = -12$
$u_0 = 6$

Dus $a = 6$.

2 a $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 4$
$-\frac{1}{2}u_{n-1} = -u_n + 4$
$u_{n-1} = 2u_n - 8$
De rij $v_n = 2v_{n-1} - 8$ met $v_0 = 10$ is de omkeerrij van de rij u_n.
$v_5 = 72$, dus van de rij u_n met $u_0 = 72$ is $u_5 = 10$.

b u_n is constante rij als $u_n = u_{n-1} = c$.
Dit geeft $c = \frac{1}{2}c + 4$
$\frac{1}{2}c = 4$
$c = 8$
Dus voor $a = 8$ is de rij u_n constant.

3 $u_2 = 10$ geeft $10 = \dfrac{6}{u_1} + 2$
$8 = \dfrac{6}{u_1}$
$8u_1 = 6$
$u_1 = \frac{3}{4}$
$u_1 = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{3}{4} = \dfrac{6}{u_0} + 2$
$-\frac{5}{4} = \dfrac{6}{u_0}$
$-5u_0 = 24$
$u_0 = -\frac{24}{5}$
Dus $a = -\frac{24}{5}$.

4 a Voer in $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 3}{u_n}$ met $u_0 = 10$.
$u_6 = 10$, dus de periode is 6.

b Voor een constante rij geldt $u_{n+1} = u_n = c$.
Dit geeft $c = \dfrac{3c - 3}{c}$
$c^2 = 3c - 3$
$c^2 - 3c + 3 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$
geen oplossingen
Er zijn dus geen waarden van a waarvoor de rij constant is.

c Noem $u_n = a$ en $u_{n+1} = b$.
Dit geeft $b = \dfrac{3a - 3}{a}$
$ab = 3a - 3$
$ab - 3a = -3$
$a(b - 3) = -3$
$a = \dfrac{-3}{b - 3}$
Dus de rij $v_{n+1} = \dfrac{-3}{v_n - 3}$ met $v_0 = 1\frac{1}{2}$ is de omkeerrij. Dit geeft $v_2 = 3$.
Dus voor $a = 3$ is $u_2 = 1\frac{1}{2}$.

d De term u_{n+1} is niet gedefinieerd als $u_n = 0$.
De omkeerrij $v_{n+1} = \dfrac{-3}{v_n - 3}$ met $v_0 = 0$ geeft $v_2 = 1{,}5$.
Dus voor $a = 1{,}5$ zijn slechts drie termen van de rij u_n gedefinieerd.

5 a Bij $u_0 = 2$ is u_1 niet gedefinieerd, dus $a = 2$ geeft een rij die slechts uit één term bestaat.

$u_1 = 2$ geeft $2 = \dfrac{-2}{a-2}$

$$2(a-2) = -2$$
$$2a - 4 = -2$$
$$2a = 2$$
$$a = 1$$

Dus $a = 1$ geeft een rij die slechts uit twee termen bestaat.

$u_2 = 2$ geeft $u_1 = 1$ en $u_1 = 1$ geeft $1 = \dfrac{-2}{a-2}$

$$a - 2 = -2$$
$$a = 0$$

Dus $a = 0$ geeft een rij die slechts uit drie termen bestaat.

$u_3 = 2$ geeft $u_2 = 1$ en dit geeft $u_1 = 0$.

$u_1 = 0$ geeft $0 = \dfrac{-2}{a-2}$ en dit geeft geen oplossingen.

De gevraagde waarden van a zijn dus 0, 1, en 2.

b $u_0 = a$ geeft $u_1 = \dfrac{-2}{a-2}$

$$u_2 = \frac{-2}{u_1 - 2} = \frac{-2}{\frac{-2}{a-2} - 2} = \frac{-2(a-2)}{-2-2(a-2)} = \frac{-2a+4}{-2-2a+4} = \frac{-2a+4}{-2a+2} = \frac{a-2}{a-1}$$

$$u_3 = \frac{-2}{u_2 - 2} = \frac{-2}{\frac{a-2}{a-1} - 2} = \frac{-2(a-1)}{a-2-2(a-1)} = \frac{-2a+2}{a-2-2a+2} = \frac{-2a+2}{-a} = \frac{2a-2}{a}$$

$$u_4 = \frac{-2}{u_3 - 2} = \frac{-2}{\frac{2a-2}{a} - 2} = \frac{-2a}{2a-2-2a} = \frac{-2a}{-2} = a$$

Voor elke a ongelijk aan 2, 1 en 0 is $u_4 = u_0$ en dus is de rij periodiek met periode 4.

6 a $a = 5$ geeft de rij $5,\ -\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{4},\ \frac{7}{8},\ \ldots$

Dit is een begrensde rij.

b De rij is constant als $u_{n+1} = u_n = c$.

Dit geeft $c = -0{,}5c + 2$

$$1{,}5c = 2$$
$$c = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}.$$

Voor $a = \frac{4}{3}$ is de rij constant.

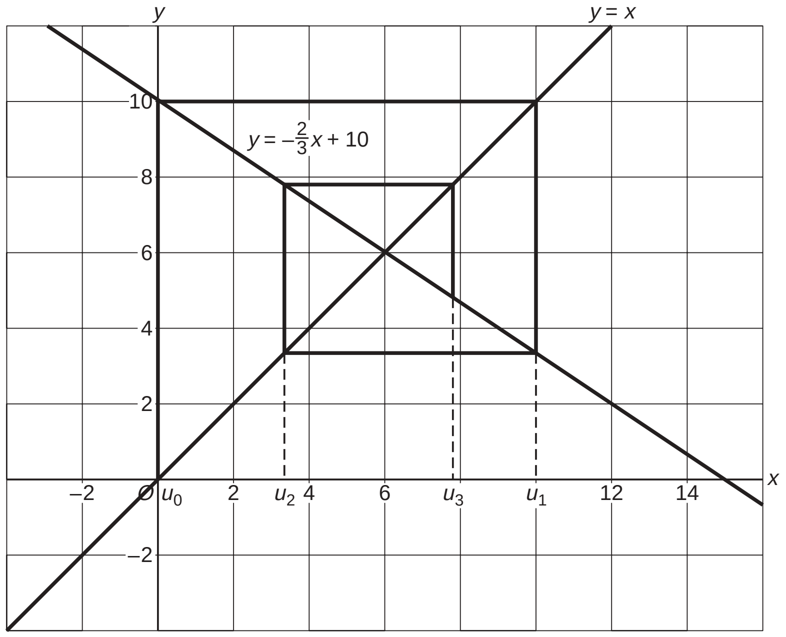
7 a $u_1 = 1$ geeft de rij 1, 3,3166, 2,9468, 3,0089, ...

Dit is een begrensde rij.

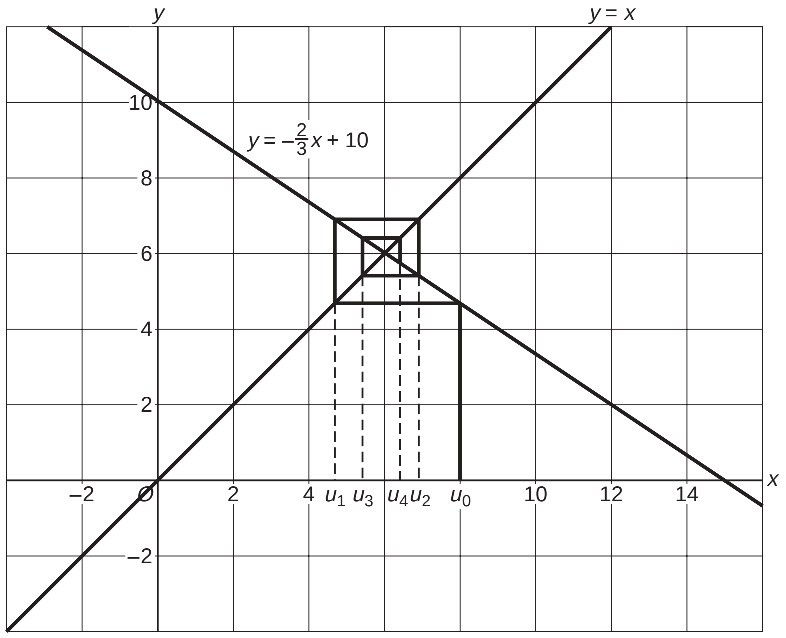
b $u_5 \approx 3{,}0002$ en $u_6 \approx 3{,}0000$

De grenswaarde is 3.

8 a



b



c De rij is constant als $u_n = u_{n-1} = c$.

Dit geeft $c = -\frac{2}{3}c + 10$

$\frac{5}{3}c = 10$

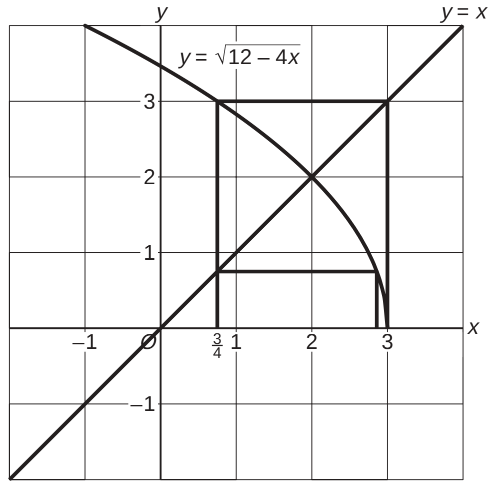
$c = 6$

Dus voor $a = 6$ is de rij constant.

9 a De rij is constant als $u_n = u_{n-1} = c$.
Dit geeft $c = \sqrt{12 - 4c}$
Kwadrateren geeft $c^2 = 12 - 4c$
$c^2 + 4c - 12 = 0$
$(c + 6)(c - 2) = 0$
$c = -6 \quad \vee \quad c = 2$
voldoet niet   voldoet
De rij is constant voor $a = 2$.

b $a = 2{,}9$ geeft de rij $2{,}9,\quad 0{,}632,\quad 3{,}077$.
De rij bestaat uit drie termen.

c $u_0 = 3$ geeft 3 termen
$u_0 > 3$ geeft 1 term
$u_1 = 3$ geeft $\sqrt{12 - 4u_0} = 3$
$12 - 4u_0 = 9$
$-4u_0 = -3$
$u_0 = \frac{3}{4}$
Dus voor $a < \frac{3}{4}$ bestaat de rij uit precies twee termen.



10 a $u_n = 2n + 1$ is een rr.
$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(1+2n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2$$
b $u_n = 2n - 1$ is een rr.
$$\sum_{k=0}^{2n}(2k-1) = \tfrac{1}{2}(2n+1)(-1+2\cdot 2n-1) = \tfrac{1}{2}(2n+1)(4n-2) = (2n+1)(2n-1) = 4n^2 - 1$$
c $u_n = 2^n$ is een mr.
$$\sum_{k=0}^{n}(2^k) = \frac{1\cdot(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1} - 1$$
d $u_n = (\frac{1}{2})^n$ is een mr.
$$\sum_{k=n}^{2n}(\tfrac{1}{2})^k = \frac{\text{eerste term} - \text{volgende term}}{1 - \text{factor}} = \frac{(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^{2n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot(\tfrac{1}{2})^n - 2\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n+1}$$

11 a De rij is een rr met $b = 20$ en $v = 5$.
$$5 + 10 + 15 + \ldots + (5n+20) = \sum_{k=-3}^{n}(5k+20) = \tfrac{1}{2}(n+1--3)(5+5n+20) = \tfrac{1}{2}(n+4)(5n+25)$$
b De rij is een mr met $r = 4$.
$$3 + 3\cdot 4 + 3\cdot 4^2 + \ldots + 3\cdot 4^{n-1} = \frac{3 - 3\cdot 4^n}{1-4} = -1 + 4^n$$
c De rij is een mr met $r = \frac{1}{2}$.
$$64 + 32 + 16 + \ldots + 64\cdot(\tfrac{1}{2})^n = \frac{64 - 64\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 128 - 128\cdot(\tfrac{1}{2})^{n+1}$$

d De rij is een rr met $b = 20$ en $v = 3$.

$$11 + 14 + 17 + \ldots + (3n + 20) = \sum_{k=-3}^{n} (3k + 20) = \tfrac{1}{2}(n + 1 - -3)(11 + 3n + 20)$$
$$= \tfrac{1}{2}(n + 4)(3n + 31)$$

12 a

$$\begin{array}{lccccccccccccc} u_n & 1 & & 2 & & 7 & & 16 & & 29 & & 46 & & 67 \\ \text{verschilrij } v_n & & 1 & & 5 & & 9 & & 13 & & 17 & & 21 & \end{array}$$

$v_n = 1 + 4n$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ is een rr, dus de rij u_n is een kwadratische rij.

b $T_n = \frac{1}{2}(n + 1)(1 + 1 + 4n) = (n + 1)(2n + 1)$

$u_{n+1} = T_n + u_0 = (n + 1)(2n + 1) + 1$

Dit geeft $u_n = (n - 1 + 1)(2(n - 1) + 1) + 1 = n(2n - 2 + 1) + 1 = 2n^2 - n + 1$

13 a De rij is een mr met $b = 2$ en $r = \frac{1}{2}$.

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

b De rij is een mr met $b = 27$ en $r = -\frac{1}{3}$.

$$S = \frac{27}{1 - -\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{4}{3}} = 27 \cdot \tfrac{3}{4} = 20{,}25$$

c De rij is een mr met $b = 125$ en $r = 0{,}8$.

$$S = \frac{125}{1 - 0{,}8} = 625$$

d De rij is een mr met $b = 100$ en $r = \frac{1}{1{,}05}$.

$$S = \frac{100}{1 - \frac{1}{1{,}05}} = 2100$$

14 De oppervlakten van de rode vierkanten zijn $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$

Dit is een mr met $b = 1$ en $r = \frac{1}{4}$.

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

De grenswaarde van de som van de oppervlakten is $\frac{4}{3}$.