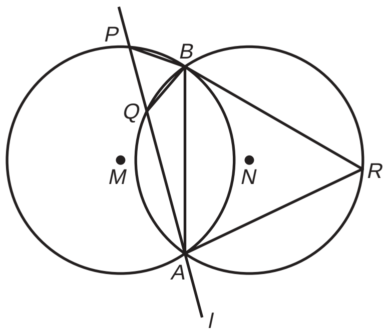


$$\left.\begin{array}{l} MA = NA \\ MB = NB \\ AB = AB \end{array}\right\} \triangle MAB \cong \triangle NAB \text{ (ZZZ) dus } \angle AMB = \angle ANB$$

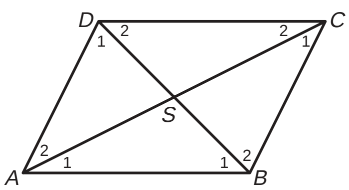
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} \angle QPB = \angle APB = \tfrac{1}{2}\angle AMB \text{ (stelling van de omtrekshoek)} \\ \angle AMB = \angle ANB \end{array}\right\} \angle QPB = \tfrac{1}{2}\angle ANB \\ \left.\begin{array}{l} \angle AQB + \angle ARB = 180^\circ \text{ (koordenvierhoekstelling)} \\ \angle ARB = \tfrac{1}{2}\angle ANB \text{ (stelling van de omtrekshoek)} \\ \angle AQB + \angle PQB = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \angle PQB = \tfrac{1}{2}\angle ANB \end{array}\right\} \angle QPB = \angle PQB$$

Hieruit volgt dat driehoek BPQ gelijkbenig is.

Diagnostische toets

bladzijde 34

1 Gegeven:
Parallellogram $ABCD$ met $AC = BD$.
Te bewijzen:
$ABCD$ is een rechthoek.
Bewijs:
Teken de diagonalen AC en BD met het snijpunt S.



$$\left.\begin{array}{l} AS = CS \text{ (parallellogram)} \\ BS = DS \text{ (parallellogram)} \\ AC = BD \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} AS = BS = CS = DS$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle B_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle A_2 = \angle D_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle A_1 + \angle A_2 + \angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \text{ (parallellogram)} \\ \angle A = 90^\circ \end{array}\right\} \angle C = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle D \text{ (parallellogram)} \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array}\right\} \angle B = \angle D = 90^\circ$$

De hoeken van $ABCD$ zijn 90°, dus $ABCD$ is een rechthoek.

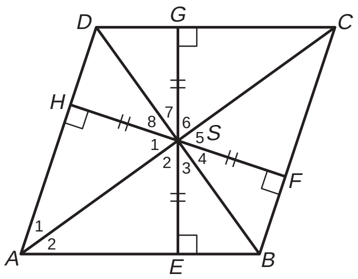
2 Gegeven:
Driehoek ABC en de naar buiten gerichte vierkanten $ACDE$ en $BFGC$.
Te bewijzen:
$AG = BD$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACG = 90^\circ + \angle ACB \\ \angle DCB = 90^\circ + \angle ACB\end{array}\right\} \angle ACG = \angle DCB$$

$$\left.\begin{array}{l}AC = CD \text{ (vierkant)} \\ BC = CG \text{ (vierkant)} \\ \angle ACG = \angle DCB\end{array}\right\} \triangle ACG \cong \triangle DCB \text{ (ZHZ) dus } AG = BD.$$

3 a Als van een vierhoek het snijpunt van de diagonalen even ver af ligt van de vier zijden, dan is die vierhoek een ruit.

b



$$\left.\begin{array}{l}SE = SH \\ \angle AES = \angle AHS \\ AS = AS\end{array}\right\} \begin{array}{l}\triangle AES \cong \triangle AHS \text{ (ZZR)} \\ \text{dus } \angle A_1 = \angle A_2 \text{ en } \angle S_1 = \angle S_2\end{array}$$

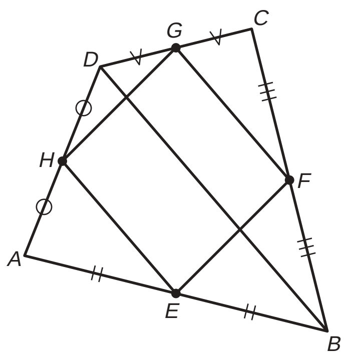
Op dezelfde manier $\angle S_3 = \angle S_4$, $\angle S_5 = \angle S_6$ en $\angle S_7 = \angle S_8$.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\angle S_1 + \angle S_2 + \ldots + \angle S_8 = 360^\circ \\ \angle S_1 = \angle S_2,\ \angle S_3 = \angle S_4,\ \angle S_5 = \angle S_6,\ \angle S_7 = \angle S_8\end{array}\right\} \angle S_{23} + \angle S_{67} = 180^\circ \\ \angle S_{23} = \angle S_{67} \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\angle S_{23} = \angle S_{67} = 90^\circ \\ \text{dus } AC \perp BD\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}AS = AS \\ \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle S_{23} = \angle S_{18} = 90^\circ\end{array}\right\} \triangle ABS \cong \triangle ADS \text{ (HZH) dus } AB = AD$$

Op dezelfde manier $AD = CD$ en $CD = BC$, dus $ABCD$ is een ruit.

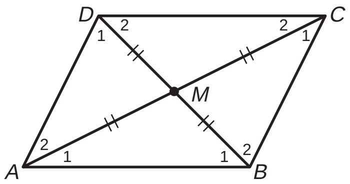
4 Gegeven:
De vierhoeken $ABCD$ en $EFGH$. Hierbij zijn
E, F, G en H middens van zijden van vierhoek $ABCD$.
Te bewijzen:
$EFGH$ is een parallellogram.
Bewijs:
Teken BD.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AE = \frac{1}{2}AB \\ AH = \frac{1}{2}AD \\ \angle A = \angle A\end{array}\right\} \begin{array}{l}\triangle AEH \sim \triangle ABD \text{ (zhz)} \\ \text{dus } EH = \frac{1}{2}BD\end{array} \\ \left.\begin{array}{l}CG = \frac{1}{2}CD \\ CF = \frac{1}{2}CB \\ \angle C = \angle C\end{array}\right\} \begin{array}{l}\triangle CGF \sim \triangle CDB \text{ (zhz)} \\ \text{dus } FG = \frac{1}{2}BD\end{array}\end{array}\right\} EH = FG$$

Op dezelfde manier: $EF = GH$.
Van vierhoek $EFGH$ zijn twee paren overstaande zijden even lang, dus $EFGH$ is een parallellogram.

5 a Gegeven:



Parallellogram $ABCD$ met zijn omgeschreven cirkel.

Te bewijzen:

$ABCD$ is een rechthoek.

Bewijs:

Teken het middelpunt M van de cirkel, MA, MB, MC en MD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MD = MC \\ AD = BC \text{ (parallellogram)} \end{array}\right\} \triangle AMD \cong \triangle BMC \text{ (ZZZ)} \\ \\ \triangle AMD \text{ en } \triangle BMC \text{ zijn gelijkbenig} \end{array}\right\} \angle A_2 = \angle D_1 = \angle B_2 = \angle C_1$$

Op dezelfde manier: $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_2 = \angle D_2$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } \angle A_{12} = \angle B_{12} = \angle C_{12} = \angle D_{12}. \\ \angle A_{12} + \angle B_{12} + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ \\ \text{dus } ABCD \text{ is een rechthoek.} \end{array}$$

b Een rechthoek heeft een omgeschreven cirkel.

De omkering is waar.

Gegeven:

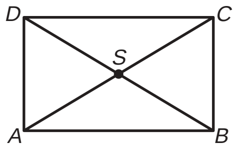
Rechthoek $ABCD$.

Te bewijzen:

$ABCD$ heeft een omgeschreven cirkel.

Bewijs:

Teken AC en BD met snijpunt S.



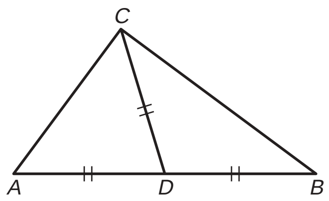
$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \text{ (parallellogram)} \\ \angle ABC = \angle DCB \\ BC = BC \end{array}\right\} \begin{array}{l} \triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ (ZHZ)} \\ \text{dus } AC = BD \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{dus } AC = BD \\ AS = CS = \tfrac{1}{2}AC \text{ (parallellogram)} \\ BS = DS = \tfrac{1}{2}BD \text{ (parallellogram)} \end{array}\right\} AS = BS = CS = DS$$

Dus $ABCD$ heeft een omgeschreven cirkel.

6 Gegeven:

Driehoek ABC, waarbij zwaartelijn CD de helft is van AB.



Te bewijzen:

$\angle ACB = 90^\circ$

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} D \text{ is het midden van } AB \\ CD = \tfrac{1}{2}AB \end{array}\right\} AD = BD = CD$$

AB is middellijn van een cirkel die door C gaat

dus $\angle ACB = 90^\circ$ (omgekeerde stelling van Thales).

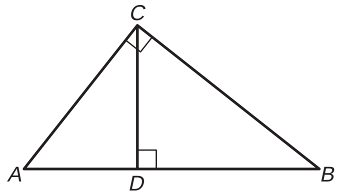
7 a Gegeven:

Driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en hoogtelijn CD.

Te bewijzen:

$AC^2 = AD \cdot AB$ en $BC^2 = BD \cdot AB$.

Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle A \\ \angle D = \angle C = 90^\circ\end{array}\right\} \triangle ADC \backsim \triangle ACB \text{ (hh)}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \text{ dus } AC^2 = AD \cdot AB$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle B \\ \angle D = \angle C = 90^\circ\end{array}\right\} \triangle BDC \backsim \triangle BCA \text{ (hh)}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \text{ dus } BC^2 = BD \cdot AB$$

b Gegeven:

Driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en hoogtelijn CD.

Te bewijzen:

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Bewijs:

$AC^2 = AD \cdot AB$ en $BC^2 = BD \cdot AD$ dus

$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB(AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$

bladzijde 35

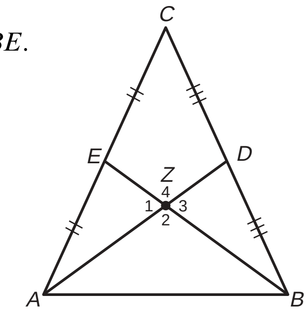
8 Gegeven:

Driehoek ABC met de zwaartelijnen AD en BE zo, dat $AD = BE$.

Te bewijzen:

Driehoek ABC is gelijkbenig.

Bewijs:

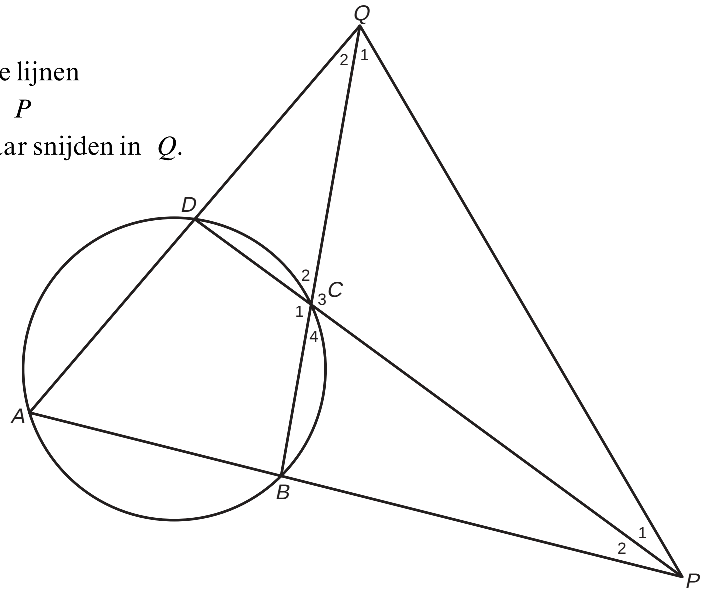


$$\left.\begin{array}{l}AZ = \tfrac{2}{3}AD \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ BZ = \tfrac{2}{3}BE \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ DZ = \tfrac{1}{3}AD \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ EZ = \tfrac{1}{3}BE \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ AD = BE \text{ (gegeven)}\end{array}\right\} AZ = BZ \text{ en } EZ = DZ$$

$$\left.\begin{array}{l}AZ = BZ \\ EZ = DZ \\ \angle Z_1 = \angle Z_3 \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \triangle AZE \cong \triangle BZD \text{ (ZHZ)}$$

$$\text{Dus } \left.\begin{array}{l}AE = BD \\ AE = \tfrac{1}{2}AC \\ BD = \tfrac{1}{2}BC\end{array}\right\} AC = BC \text{ dus } \triangle ABC \text{ is gelijkbenig.}$$

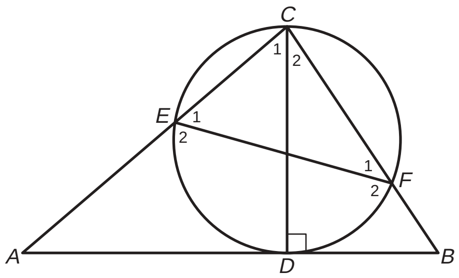
9 Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ met de lijnen AB en CD die elkaar snijden in P en de lijnen AD en BC die elkaar snijden in Q.
Te bewijzen:
$\angle P_1 + \angle Q_1 = \angle A$
Bewijs:
Teken PQ.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle C_1 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoekstelling)} \\ \angle C_1 = \angle C_3 \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \angle C_3 + \angle A = 180^\circ \\ \angle C_3 + \angle P_1 + \angle Q_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \angle A = \angle P_1 + \angle Q_1$$

10 a
$$\left.\begin{array}{l}\angle EFC = \angle EDC \text{ (stelling van de constante hoek)} \\ \triangle CED \text{ is rechthoekig in } E \text{ (omgekeerde stelling van Thales)} \\ \angle EDC + \angle ECD + \angle CED = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \angle EFC + \angle ECD = 90^\circ$$

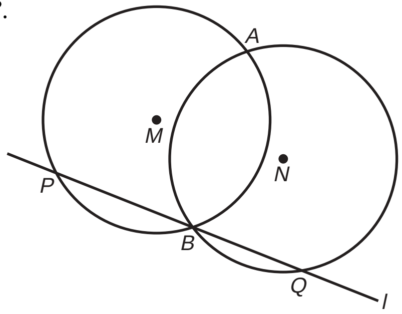
b Gegeven:
Driehoek ABC met de hoogtelijn CD.
De cirkel met middellijn CD snijdt AC in E en BC in F.
Te bewijzen:
$ABFE$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle C_1 + 90^\circ = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle F_1 + \angle C_1 = 90^\circ \text{ (zie a)}\end{array}\right\} \angle A = \angle F_1 \\ \angle F_1 + \angle F_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \angle A + \angle F_2 = 180^\circ$$

Dus $ABFE$ is koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

11 Gegeven:
Twee cirkels met gelijke straal die elkaar snijden in A en B.
De lijn l gaat door B en snijdt de cirkels in P en Q.
Te bewijzen:
$AP = AQ$
Bewijs:
Noem de middelpunten van de cirkels M en N.

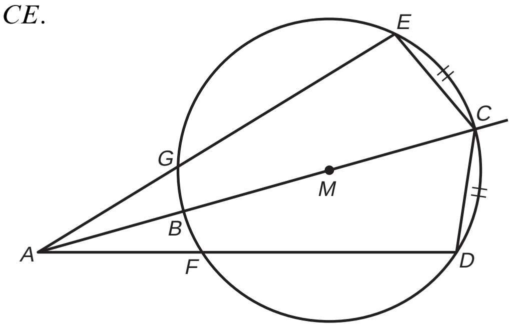


$$\left.\begin{array}{l} MA = NA \text{ (gelijke straal)} \\ MB = NB \text{ (gelijke straal)} \\ AB = AB \end{array}\right\} \begin{array}{l} \triangle MAB \cong \triangle NAB \text{ (ZZZ)} \\ \text{dus } \angle AMB = \angle ANB \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle APB = \tfrac{1}{2}\angle AMB \text{ (stelling van de omtrekshoek)} \\ \angle AQB = \tfrac{1}{2}\angle ANB \text{ (stelling van de omtrekshoek)} \\ \angle AMB = \angle ANB \end{array}\right\} \angle APB = \angle AQB$$

Dus $\triangle APB$ is gelijkbenig met $AP = AQ$.

12 Gegeven:
Cirkel c met middelpunt M en punt A buiten de cirkel. Lijn AM snijdt de cirkel in B en C.
Op c liggen D en E zo, dat boog CD = boog CE.
Te bewijzen:
$\angle CAE = \angle CAD$
Bewijs:
Teken CE en CD.



$$\left.\begin{array}{l} \text{boog } CD = \text{boog } CE \\ BC \text{ is middellijn} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{boog } DB = \text{boog } EB \\ \text{dus } \angle ECB = \angle DCB \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle ECB = \angle DCB \\ AC = AC \\ CD = CE \text{ (boog en koorde)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \triangle ACE \cong \triangle ACD \text{ (ZHZ)} \\ \text{dus } \angle CAE = \angle CAD \end{array}$$