Diagnostische toets

bladzijde 80

1 a Op $t = 1$ zijn er 1455 prooidieren en op $t = 5$ zijn er 1305 prooidieren.
b Na 43 maanden is het aantal prooidieren voor het eerst maximaal.
Er zijn dan 2203 prooidieren.
c $P_t = P_{t-1} + \Delta P$ met $\Delta P = (0{,}15 - 0{,}001R_{t-1})P_{t-1}$
In de evenwichtssituatie is $(0{,}15 - 0{,}001\overline{R})\overline{P} = 0$

$$0{,}15 - 0{,}001\overline{R} = 0$$
$$0{,}001\overline{R} = 0{,}15$$
$$\overline{R} = 150$$

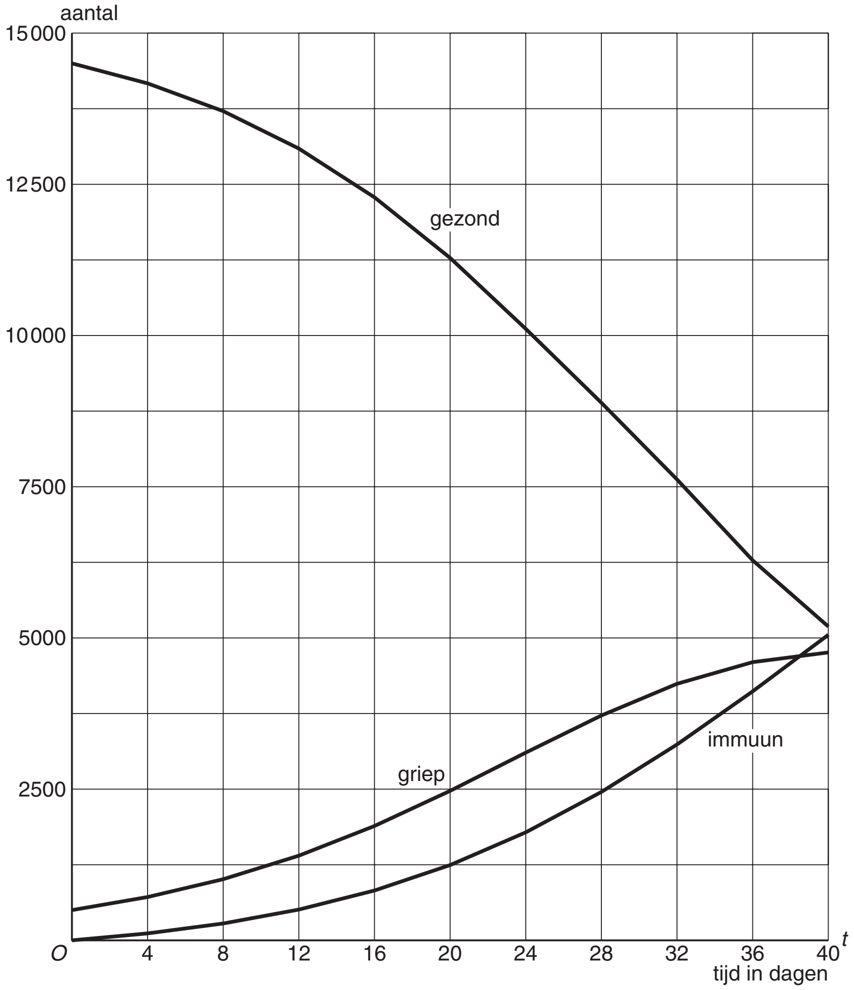
$R_t = R_{t-1} + \Delta R$ met $\Delta R = (-0{,}08 + 0{,}00005P_{t-1})R_{t-1}$
In de evenwichtssituatie is $(-0{,}08 + 0{,}00005\overline{P})\overline{R} = 0$

$$-0{,}08 + 0{,}00005\overline{P} = 0$$
$$0{,}00005\overline{P} = 0{,}08$$
$$\overline{P} = 1600$$

Dus $\overline{P} = 1600$ en $\overline{R} = 150$.

2 a Op $t = 1$ zijn er 14 428 inwoners die nog gezond zijn en 548 inwoners die de griep hebben en 24 inwoners die immuun zijn.
Op $t = 2$ zijn er 14 349 inwoners die nog gezond zijn en 599 inwoners met griep en 52 inwoners die immuun zijn.
b $Z_3 - Z_2 = 655 - 599 = 56$
Dus op de derde dag hebben 56 mensen de griep gekregen.
c

t	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
I_t	0	115	279	509	824	1245	1786	2454	3239	4117	5052



3 a Gesloten systeem, dus voor elke t is $x_{t-1} + y_{t-1} = 60$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ofwel } y_{t-1} = 60 - x_{t-1} \\ x_t = 0{,}15x_{t-1} + 0{,}65y_{t-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_t = 0{,}15x_{t-1} + 0{,}65(60 - x_{t-1}) \\ x_t = 0{,}15x_{t-1} + 39 - 0{,}65x_{t-1} \\ x_t = -0{,}5x_{t-1} + 39 \text{ met } x_0 = 20 \end{array}$$

$$x_t = \overline{x} + a^t(x_0 - \overline{x}) \text{ met } \overline{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{39}{1+0{,}5} = 26$$

$$x_t = 26 + (-0{,}5)^t(20 - 26)$$
$$x_t = 26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t$$

$$\left.\begin{array}{l} y_t = 60 - x_t \\ x_t = 26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_t = 60 - (26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t) \\ y_t = 34 + 6 \cdot (-0{,}5)^t \end{array}$$

b Voer de formules $y_1 = 26 - 6 \cdot (-0{,}5)^x$ en $y_2 = 34 + 6 \cdot (-0{,}5)^x$ in en kijk in de tabel.
Lees af $x_{12} \approx 25{,}9985$, $y_{12} \approx 34{,}0015$, $x_{13} \approx 26{,}0007$ en $y_{13} \approx 33{,}9993$.
Dus vanaf $t = 13$.

c Omdat $\overline{x} = 26$ en $\frac{26}{60} \approx 0{,}4333$ en omdat $\overline{y} = 34$ en $\frac{34}{60} \approx 0{,}5667$ zal voor grote n gelden

$$S^n \approx \begin{pmatrix} 0{,}4333 & 0{,}4333 \\ 0{,}5667 & 0{,}5667 \end{pmatrix}.$$

4 a $p_0 = 6$, dus $q_1^a = 6 \cdot 6 + 12 = 48$

$$\left.\begin{array}{l} q_1^v = 48 \\ q_1^v = -4p_1 + 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 48 = -4p_1 + 100 \\ 4p_1 = 52 \\ p_1 = 13 \end{array}$$

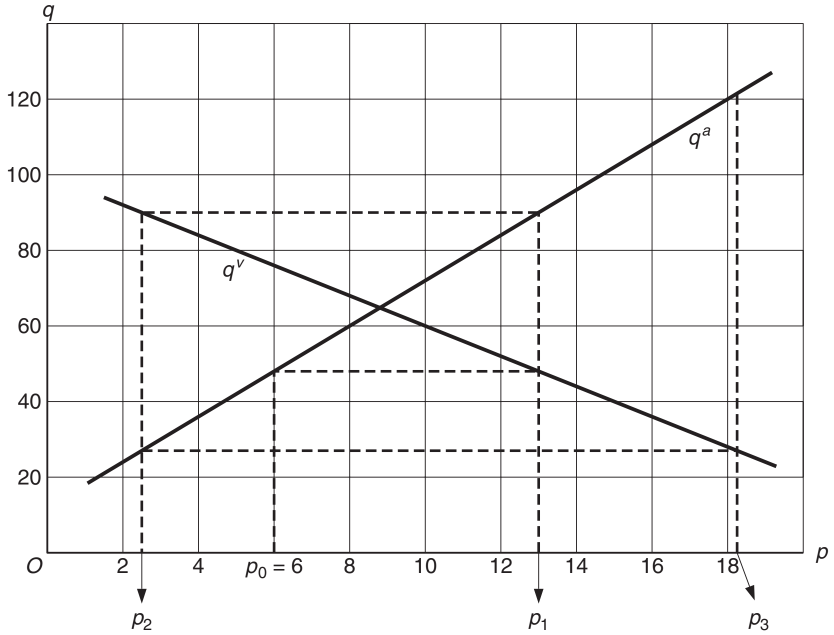
$p_1 = 13$, dus $q_2^a = 6 \cdot 13 + 12 = 90$

$$\left.\begin{array}{l} q_2^v = 90 \\ q_2^v = -4p_2 + 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 90 = -4p_2 + 100 \\ 4p_2 = 10 \\ p_2 = 2{,}5 \end{array}$$

$p_2 = 2{,}5$, dus $q_3^a = 6 \cdot 2{,}5 + 12 = 27$

$$\left.\begin{array}{l} q_3^v = 27 \\ q_3^v = -4p_3 + 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 27 = -4p_3 + 100 \\ 4p_3 = 73 \\ p_3 = 18{,}25 \end{array}$$

b



Er treedt geen convergentie op.

c Als $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \ldots$, dan is $p_0 = \overline{p}$.
In de evenwichtssituatie is $p_t = p_{t-1} = \overline{p}$.
Je krijgt $q_t^a = q_t^v$ geeft $6\overline{p} + 12 = -4\overline{p} + 100$

$$10\overline{p} = 88$$
$$\overline{p} = 8{,}8$$

Dus bij $p_0 = \overline{p} = 8{,}8$ is $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \ldots$.

5 a $\left.\begin{array}{l} q_t^a = 0{,}8p_{t-1} + 4 \\ q_t^v = 1{,}2p_t + 12 \end{array}\right\}$ Uit $q_t^a = q_t^v$ volgt $0{,}8p_{t-1} = 4 = -1{,}2p_t + 12$

$1{,}2p_t = -0{,}8p_{t-1} + 8$

$p_t = -\frac{2}{3}p_{t-1} + 6\frac{2}{3}$ met $p_0 = 8$

$$p_t = \overline{p} + a^t(p_0 - \overline{p}) \text{ met } \overline{p} = \frac{b}{1-a} = \frac{6\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 4$$

$p_t = 4 + (-\frac{2}{3})^t(8-4)$

$p_t = 4 + 4 \cdot (-\frac{2}{3})^t$

b Voor grote t is $(-\frac{2}{3})^t \approx 0$, dus de prijs convergeert naar de evenwichtswaarde $\overline{p} = 4 + 4 \cdot 0 = 4$.

6 $\left.\begin{array}{l} C_t = 0{,}7Y_{t-1} + 60 \\ I_t = 30 \\ Y_t = C_t + I_t \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} Y_t = 0{,}7Y_{t-1} + 60 + 30 \\ Y_t = 0{,}7Y_{t-1} + 90 \text{ met } Y_0 = 120 \end{array}$

$$Y_t = \overline{Y} + a^t(Y_0 - \overline{Y}) \text{ met } \overline{Y} = \frac{b}{1-a} = \frac{90}{1-0{,}7} = 300$$

$Y_t = 300 + 0{,}7^t(120 - 300)$

$Y_t = 300 - 180 \cdot 0{,}7^t$

7 a $\sum_{k=0}^{15} u_k = \frac{1}{2} \cdot 16(u_0 + u_{15}) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (10 + 22) = 256$

$\sum_{k=10}^{30} u_k = \frac{1}{2} \cdot 21(u_{10} + u_{30}) = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot (18 + 34) = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 52 = 546$

b $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(10 + 10 + 0{,}8n) = \frac{1}{2}(n+1)(20 + 0{,}8n)$

$= \frac{1}{2}(20n + 0{,}8n^2 + 20 + 0{,}8n) = \frac{1}{2}(0{,}8n^2 + 20{,}8n + 20) = 0{,}4n^2 + 10{,}4n + 10$

Hiermee is de juistheid van de formule aangetoond.

8 a $\sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{10(1 - 0{,}8^{11})}{1 - 0{,}8} \approx 45{,}705$

$\sum_{k=5}^{15} u_k = \frac{3{,}2768(1 - 0{,}8^{11})}{1 - 0{,}8} \approx 14{,}977$

b $10 + 8 + 6{,}4 + 5{,}12 + 4{,}096 + \ldots = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots = \frac{10}{1 - 0{,}8} = 50$

c $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{10(1 - 0{,}8^{n+1})}{1 - 0{,}8} = \frac{10(1 - 0{,}8 \cdot 0{,}8^n)}{0{,}2} = 50(1 - 0{,}8 \cdot 0{,}8^n) = 50 - 40 \cdot 0{,}8^n$