[1][2]

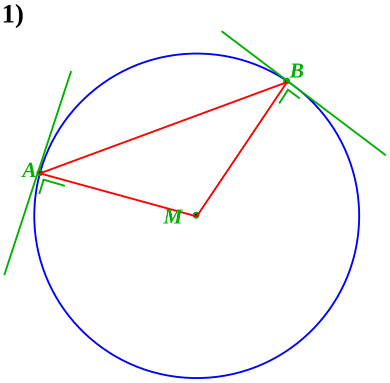
Uitwerkingen voor het VWO B2

Hoofdstuk 7 : Raaklijnen

Kern 1

Cirkels en Raaklijnen

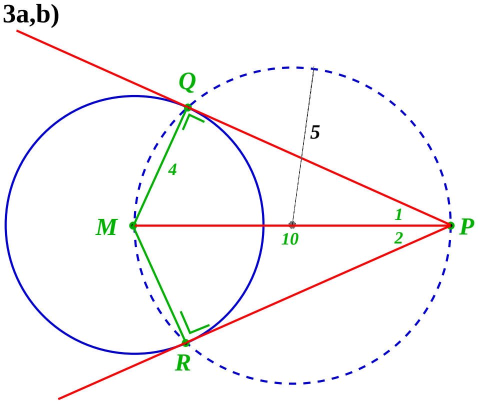
1)



Teken MA en MB. De raaklijnen in A staat loodrecht op MA. Voor de raaklijn in B geldt hetzelfde.

2)
Gebruik of de stelling van de omtrekshoek of de omgekeerde stelling van Thales. (zie blz. 78)
Stelling van de omtrekshoek:$\angle MNP = 180^o \Rightarrow \angle MQ_1P = 90^o \Rightarrow PQ_1$is een raalijn aan de cirkel met middelpunt M. Hetzelfde geldt voor PQ_2.
Omgekeerde stelling van Thales: $\angle MQ_1P$ is een omtrekshoek, die bij de middellijn MP hoort.
Dus $\angle MQ_1P = 90^o$.
$\Rightarrow PQ_1$is een raalijn aan de cirkel met middelpunt M. Hetzelfde geldt voor PQ_2.

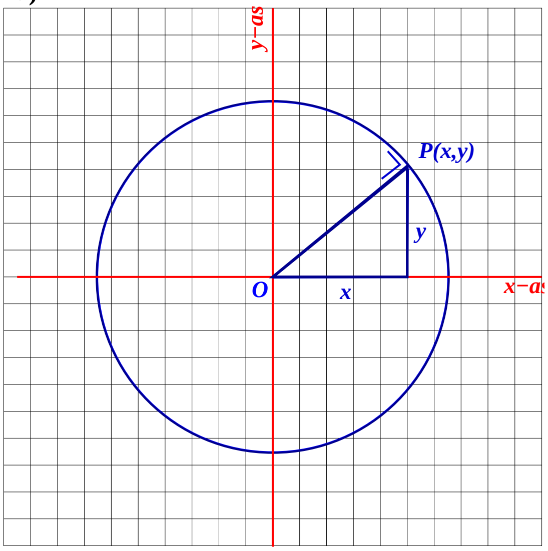
3a,b)



c) $\sin \angle P_1 = \frac{4}{10} \Rightarrow \angle P_1 \approx 23,6^o \Rightarrow \angle P \approx 47,2^o$.

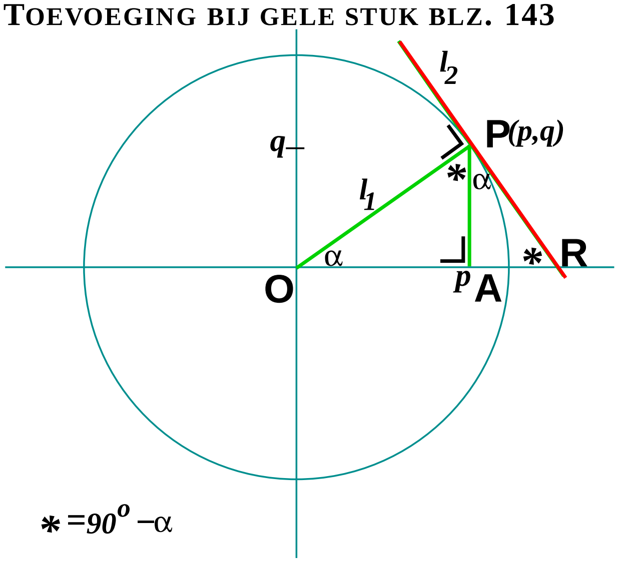
[1] werd gemaakt onder LinuX met LaTeX en LyX
[2] Typ&andere fouten&blunders graag Melden!

4a)



b) Pas de stelling van Pythagoras toe in het driehoekje met punt P en je krijgt de vergelijking van de cirkel.

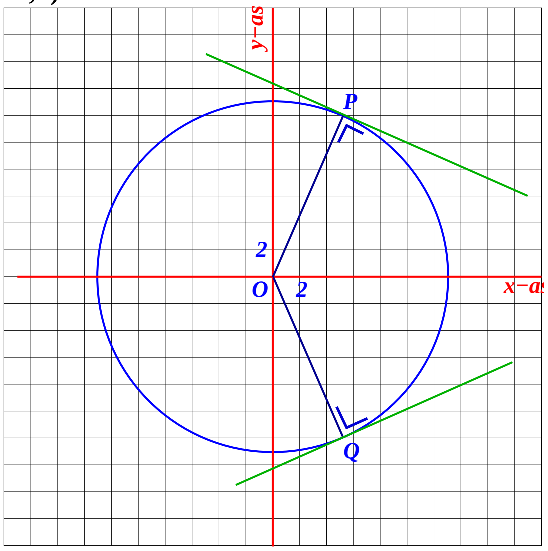
TOEVOEGING BIJ GELE STUK BLZ. 143



De richtingscoefficient van l_1 is : $\tan\alpha = \frac{q}{p}$
De richtingscoefficient van l_2 is :
$-\frac{AP}{AR} = -\tan(90^o - \alpha) = -\frac{p}{q}$
Hieruit volgt dat rico $l_1 \cdot$rico $l_2 = \frac{q}{p} \cdot -\frac{p}{q} = -1$.

5)
$\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{3} = -1$. (eigenschap van loodrechte stand)

6a,b)



6c)

R.c. van OP: $\frac{12}{5}\ \Rightarrow$

r.c. van raaklijn door P is $-\frac{5}{12}$

$$\left.\begin{array}{c} y=-\frac{5}{12}x+b \\ (5,12) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 12=-\frac{5}{12}\cdot 5+b\ \Rightarrow$$

$b=14\frac{1}{12}$ dus $y=-\frac{5}{12}x+14\frac{1}{12}$

6d) R.c. van OQ: $-\frac{12}{5}\ \Rightarrow$

r.c. van raaklijn door Q is $\frac{5}{12}$

$$\left.\begin{array}{c} y=\frac{5}{12}x+b \\ (5,-12) \end{array}\right\} \Rightarrow\ -12=\frac{5}{12}\cdot 5+b\ \Rightarrow$$

$b=-14\frac{1}{12}$ dus $y=\frac{5}{12}x-14\frac{1}{12}$

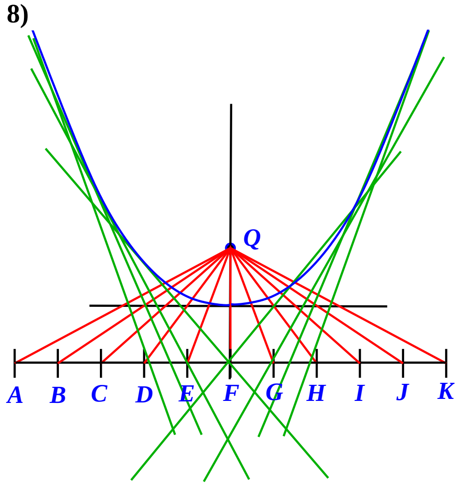
7a) Pas de stelling van Pythagoras toe. De lengte van het vertikale lijnstuk is $y-2$.
b) Door in te vullen in de vergelijking.
c) R.c. van MP: $-\frac{4}{3}\ \Rightarrow$ r.c. van raaklijn in P : $\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{c} y=\frac{3}{4}x+b \\ (3,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow\ -2=\frac{3}{4}\cdot 3+b\ \Rightarrow\ b=-4\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ y=\frac{3}{4}x-4\frac{1}{4}$$

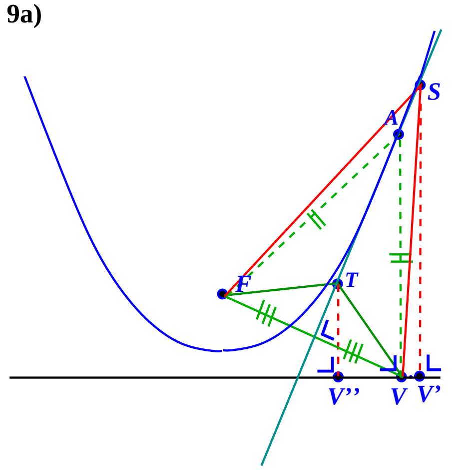
d) $y=-5$ en $y=5$

Kern 2
Parabolen en Raaklijnen

8)

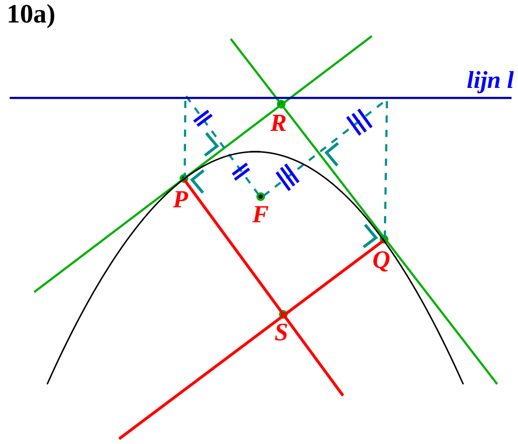


9a)



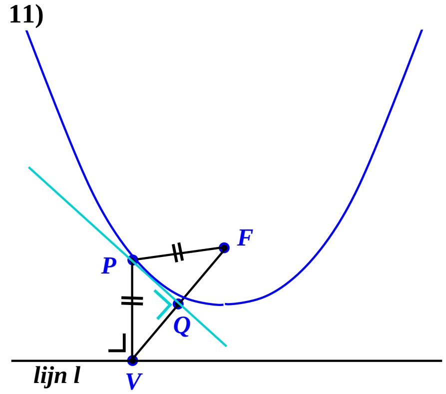
$(SV)^2 = (SV')^2 + (VV')^2 \;\Rightarrow\; SV > SV'$
b) m is middelloodlijn, dus is $FS = SV$
Dan is ook $FS > SV'$ en ligt S buiten
de parabool (zie ook hfst 6, som 15)
c) $TV > TV''$ (pythagoras)
$TV = TF \;\Rightarrow\; TF > TV''$,dus T ligt buiten
de parabool.

10a)



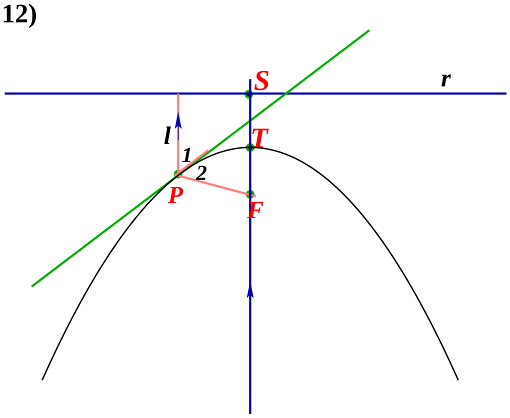
b) $\angle P + \angle Q = 180^o$,
dus is $PQRS$ een koordenvierhoek.

11)



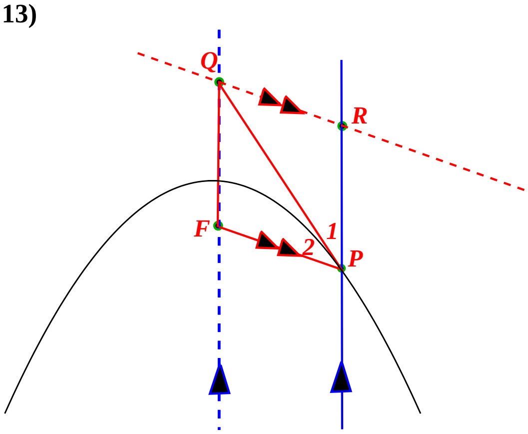
Teken lijnstuk FV
$\triangle PQV \cong \triangle PQF$ (geval ZZR)
Dan zijn de hoeken bij P ook even groot.

12)



Teken l door P evenwijdig aan de symmetrie-as.
Teken PF zo dat $\angle P_1 = \angle P_2$
Brandpunt is het snijpunt van PF en de symmetrie-as.
Vervolgens construeer je de richtlijn r door S, loodrecht op de symmetrie-as.
$FT = TS$

13)

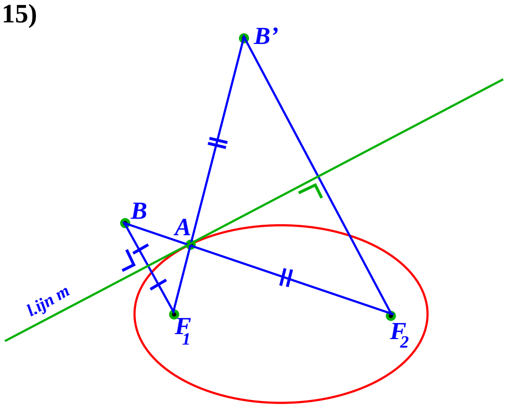


Teken de lijn door Q evenwijdig aan PF.
Nu is vierhoek $PFQR$ een ruit. Bij een ruit deelt een diagonaal de hoek middendoor.
Dus is $\angle P_1 = \angle P_2$en is PQ een raaklijn.

KERN 3
ELLIPS EN HYPERBOOL

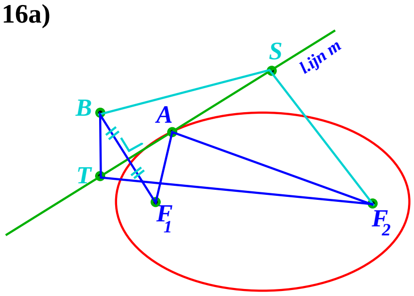
14) Knip de cirkel eerst uit voordat je gaat vouwen.

15)



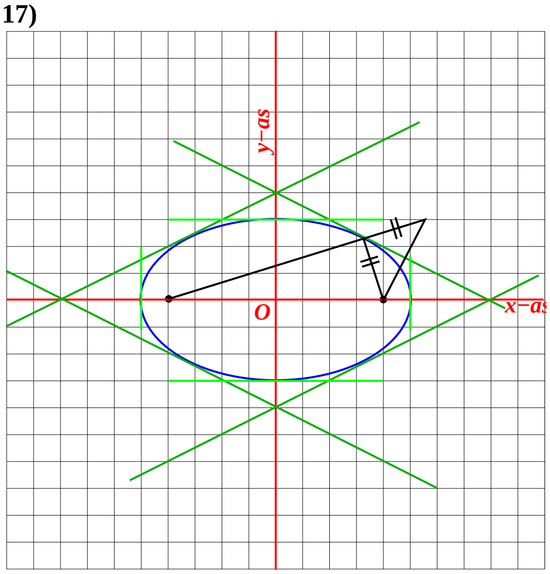
m is ook middelloodlijn van $B'F_2$.

16a)

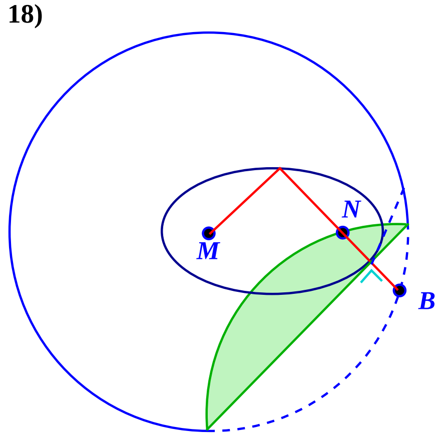


b) Omdat Sop m ligt , is $SB = SF_1$.
$F_2B = F_2A + AB = F_2A + AF_1$, want
ook A ligt op m.
Dus is $F_2S + SF_1 > F_2A + AF_1$
c) Op de ellips geldt dat de som van de afstanden constant is . Buiten deze ellips is de som groter, dus ligt S buiten de ellips.
d) $F_2T + TB > F_2B$ (driehoeksongelijkheid)
$TB = TF_1$ (middelloodlijnen)
$F_2B = F_2A + AB = F_2A + AF_1$
Dus is $F_2T + TF_1 > F_2A + AF_1$ en ligt T buiten de ellips.

17)

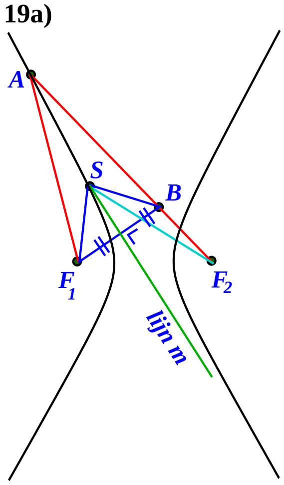


18)



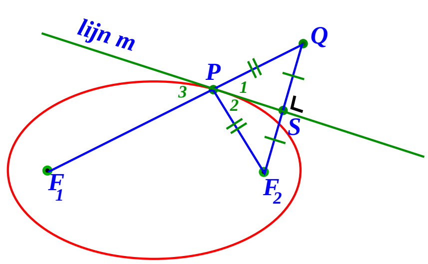
Spiegel punt N in de vouwlijn.
Je krijgt zo punt B van de constructie uit het kleurvlak.
De vouwlijn is dan middelloodlijn van BNen dus ook de raaklijn aan de ellips.

19a)



In $\triangle BSF_2$ geldt : $SF_2 < SB + BF_2$
S ligt op m, dus $SB = SF_1$
Dus is $SF_2 < SF_1 + BF_2 \Rightarrow$
$SF_2 - SF_1 < BF_2$
b)ja
c) Omdat A op de hyperbool ligt, geldt $AF_2 - AF_1 = BF_2$
Voor ieder ander punt van m is $SF_2 - SF_1 < BF_2$, dus is A het raakpunt en is m de raaklijn.

20



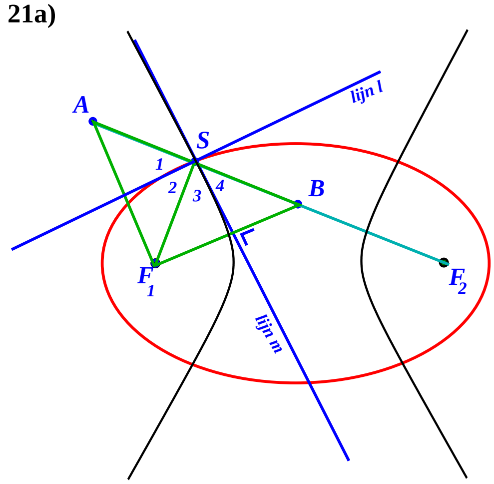
$\triangle PSF_2 \cong \triangle PSQ$, dus is

$\angle P_1 = \angle P_2$

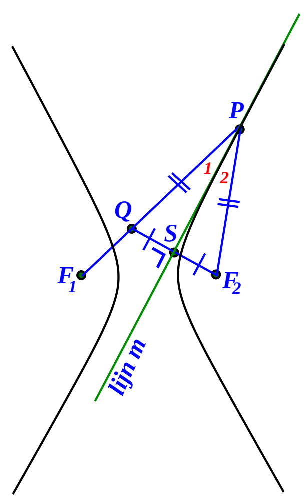
$\angle P_1 = \angle P_3$ (overstaande hoeken)

dus is $\angle P_2 = \angle P_3$

21a)



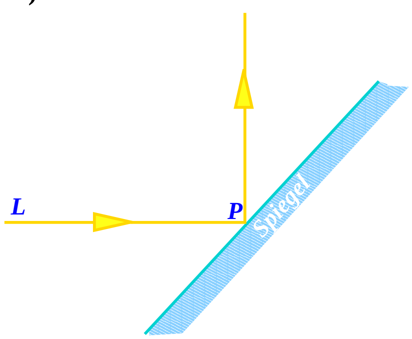
b) Teken A op het verlengde van SF_2, zodat $AS = SF_1$. l is de raaklijn aan de ellips en $\angle S_1 = \angle S_2$
Teken B op SF_2 zodat $BS = SF_1$.
m is de raaklijn aan de hyperbool en $\angle S_3 = \angle S_4$.
$\angle S_1 + \angle S_2 + \angle S_3 + \angle S_4 = 180^o$,
dus $\angle S_2 + \angle S_3 = 90^o$



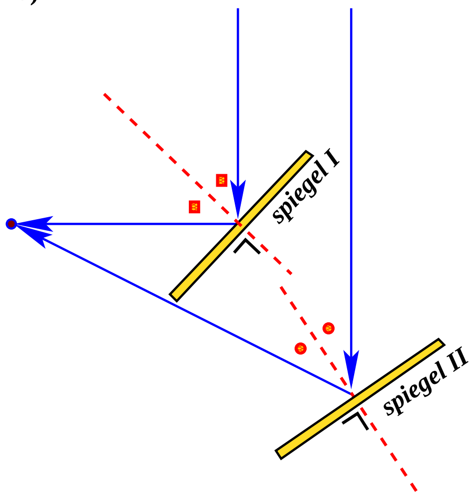
$\triangle PSF_2 \cong \triangle PSQ$,
dus is $\angle P_1 = \angle P_2$

Kern 4
Raaklijnen en spiegels

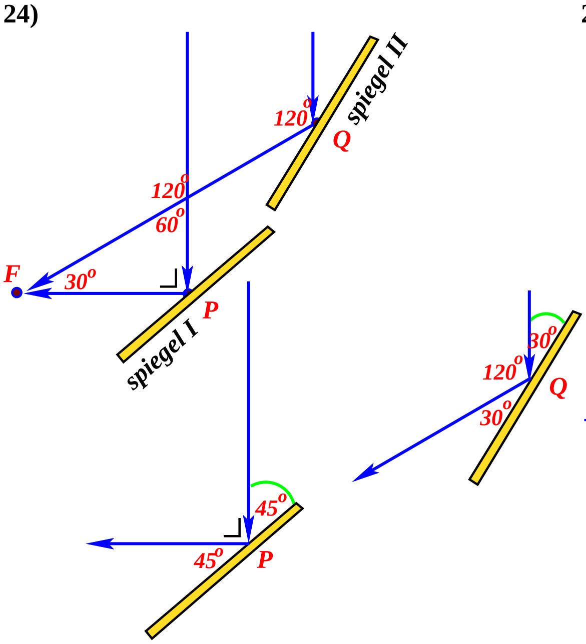
22)



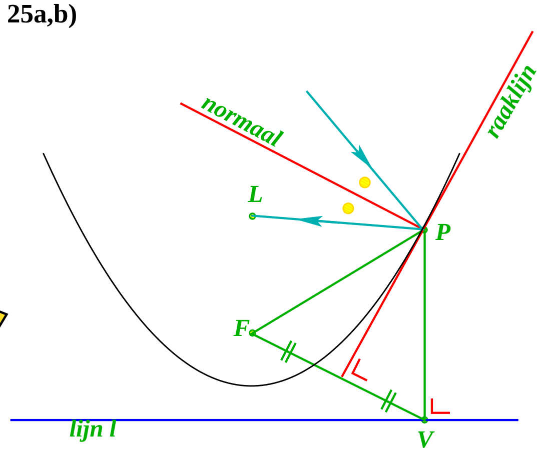
23)



24)

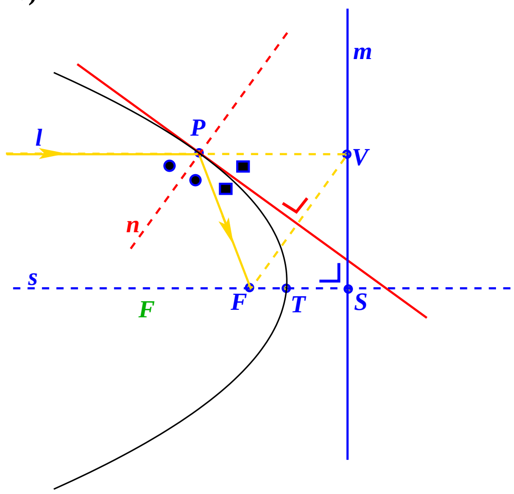


25a,b)



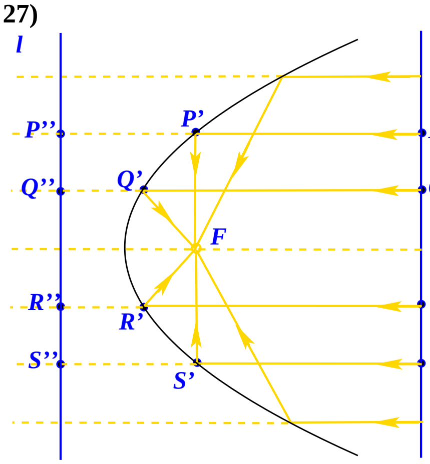
De hoek tussen beide spiegels is 15^o

26)



Teken de richtlijn m door S loodrecht op de symmetrie-as. ($FT = TS$)
Verleng de invallende lichtstraal l. $l \cap m = V$.
De middelloodlijn van FV is raaklijn aan de parabool.
De normaal n staat weer loodrecht op deze raaklijn. Dus is n ook buitendeellijn en gaat de teruggekaatste lichtstraal door F.

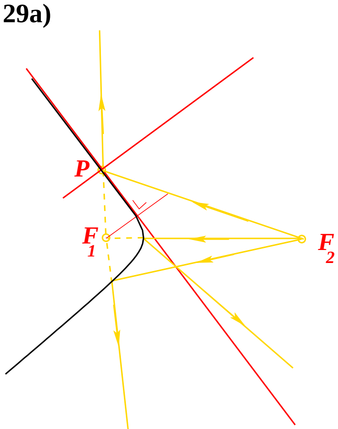
27)



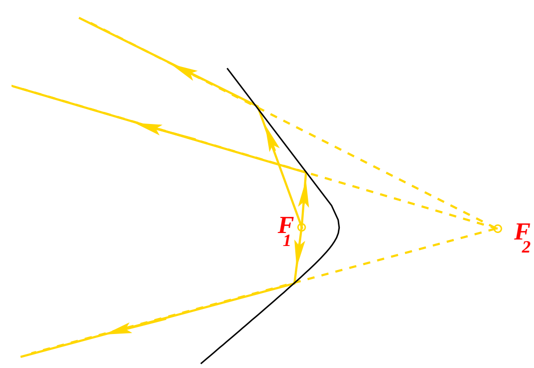
Teken de richtlijn l bij de parabool.
Nu geldt $P'P'' = P'F$, $Q'Q'' = Q'F$ en $R'R'' = R'F$.
De totale afstand van P naar F is dus gelijk aan PP''.Dat geldt ook voor de punten Q en R. Dus is de afgelegde weg steeds even lang.

28a) De lichtstralen zijn niet evenwijdig.
b) De lichtstralen zijn niet evenwijdig aan de symmetrie-as.

29a)



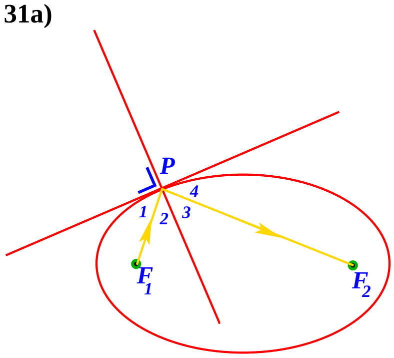
29b)



30a)
Deze is evenwijdig aan de symmetrie-as.
b) Het lampje moet dan dichter bij de spiegel geplaatst worden.

KERN 5
ELLIPTISCHE SPIEGELS

31a)

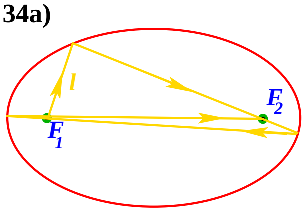


b) Die gaat door het andere brandpunt.

32) Een eigenschap van de raaklijn aan een ellips is dat $\angle P_1 = \angle P_4$. Dan is ook $\angle P_2 = \angle P_3$.
Een eigenschap van de ellips is dat $F_1P + PF_2$ constant is. (zie figuur bij opgave 31)

33)
Alle geluidsgolven uit het ene brandpunt worden weerkaatst en komen op hetzelfde tijdstip weer aan in het andere brandpunt.

34a)



b) Loopt vrijwel horizontaal.

35)
Teveel licht op *één* plek betekent dat het daar ook warm wordt. en dat moet niet.
De plaats van de lichtbron kan aangepast worden of de vorm van de spiegel. Vaak is zo'n spiegel in facetten geslepen die in een ellipsvorm staan.

36a)
Voor een gereflecteerde golf geldt $F_1P + PF_2$ is constant. Als $F_1P + PQ$ gelijk is, is ook QF_2 gelijk.
Dus het gereflecteerde front is cirkelvormig met middelpunt F_2.
b) $F_1P + PF_2 = 2a$. Er blijft dan over voor de straal van het gereflecteerde front $2a - r$.