[1][2]

UITWERKINGEN VOOR HET VWO B2

HOOFDSTUK 4

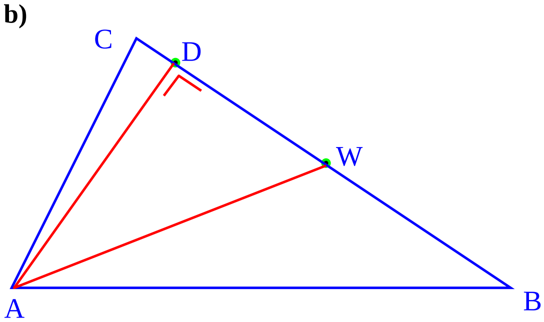
OP ZOEK NAAR BEWIJS...

Kern 1

BEWIJZEN MET OPPERVLAKTEN

1a) In het midden van BC.

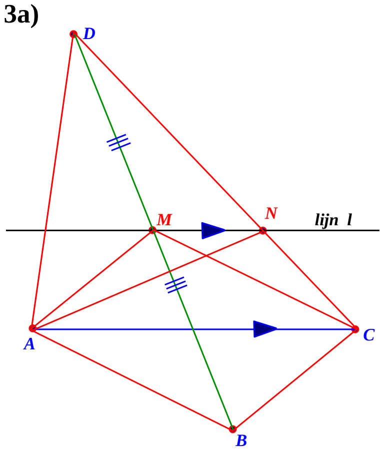
b)



bewijs: Teken de hoogtelijn AD
Opp. $\triangle ABW = \frac{1}{2} \cdot BW \cdot AD$
Opp. $\triangle ACW = \frac{1}{2} \cdot CW \cdot AD$
Stel de oppervlaktes gelijk.
$\frac{1}{2} \cdot BW \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot CW \cdot AD \Rightarrow BW = CW$
Als de oppervlaktes gelijk zijn, is $BW = CW$, dwz W ligt in het midden van BC.

2a) $AQ \,||\, PD$; stel h= afstand tussen AQ en PD
Opp. $\triangle PDQ = \frac{1}{2} \cdot PD \cdot h$ (want A ligt op AQ)
Opp. $\triangle APD = \frac{1}{2} \cdot PD \cdot h$ (want D ligt op AQ)
b) Nee, dat lukt niet. PD was een redelijk goede eerste benadering. PE is dat niet.

3a)



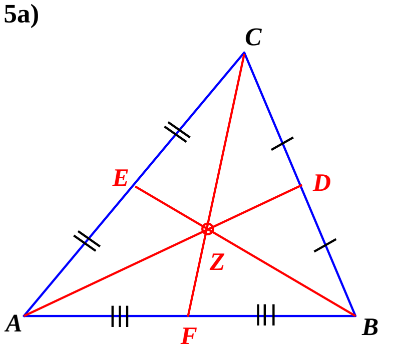
AM deelt $\triangle ABD$ in twee gelijke oppervlaktes en MC deelt $\triangle CBD$ in twee gelijke oppervlaktes. De oppervlaktes van $AMCB$ en $AMCD$ zijn dus even groot. AMC is echter geen rechte lijn.
b) Teken AC en door M de lijn $l \,||\, AC$.
l snijdt DC in N . Lijn AN is de gevraagde lijn door A. Oppervlakte van $\triangle ACM$ is gelijk aan de oppervlakte $\triangle ACN$(basis AC gemeen en dezelfde hoogte). Daarom is oppervlakte van $ABCN$ gelijk aan die van $ABCM$, en dus de helft van de totale oppervlakte.
AN is nu wel een rechte lijn.

---

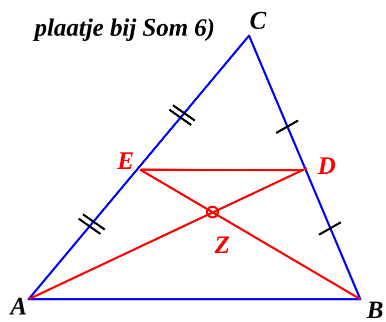
[1] *werd gemaakt onder LinuX met LaTeX en LyX*
[2] *Typ&andere fouten&blunders graag Melden!*

4a) De oppervlakte van $\triangle ADC = \frac{1}{2}G$, want $CD = \frac{1}{2} \cdot CB$.
De oppervlakte van $\triangle ADE$ is de helft van de oppervlakte van $\triangle ADC$, want $AE = \frac{1}{2} \cdot AC$.
Hieruit volgt dat opp. $\triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}G = \frac{1}{4}G$.
b) De oppervlakte van $\triangle CEB = \frac{1}{2}G$, want $CE = \frac{1}{2} \cdot CA$. De oppervlakte van $\triangle BDE$ is de helft van de oppervlakte van $\triangle BCE$, want $BD = \frac{1}{2} \cdot BC$. Hieruit volgt dat de oppervlakte van $\triangle BDE = \frac{1}{4}G$.
c) $\triangle ADE$ en $\triangle BDE$ hebben dezelfde oppervlakte. Omdat de basis DE in beide driehoeken gemeenschappelijk is, moeten de hoogtelijnen uit A en uit B op DE ook gelijk zijn.
A en B hebben dus dezelfde afstand tot de lijn ED en moeten dus op een lijn liggen die evenwijdig is aan ED.
Conclusie: $AB \parallel ED$
d) De oppervlakte van $\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot G$ omdat $BD = \frac{1}{2} \cdot BC$ en de oppervlakte van $\triangle ADE = \frac{1}{4}G$.
De oppervlakte van $\triangle ADE$ is dus de helft van de oppervlakte van $\triangle ABD$. Omdat de hoogte uit D op AB even groot is als de hoogte uit A op $ED(AB \parallel ED)$ moet voor de basis in de driehoeken gelden $ED = \frac{1}{2} \cdot AB$.

5a)



plaatje bij Som 6)



b)Het lijkt er wel op.

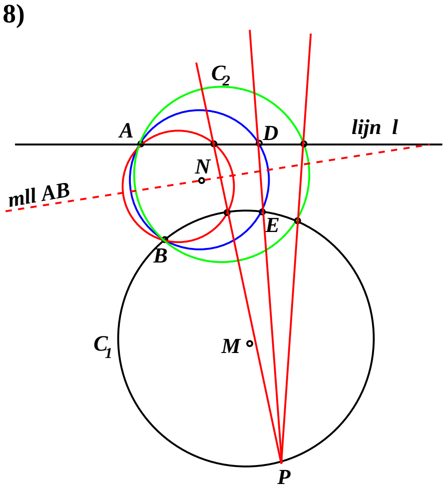
6)
a) Gegeven: $\triangle ABC$ met zwaartelijnen AD en BE en hun snijpunt Z.
Te bewijzen: $AZ : ZD = 2 : 1$
Bewijs: Teken ED Uit de stelling van de middenparallel volgt dat $ED \parallel AB$.
Hieruit volgt dat $\angle ABZ = \angle DEZ$ (Z-hoeken).
Omdat verder de overstaande hoeken bij Z gelijk zijn volgt dat $\triangle DEZ \sim \triangle ABZ$
Omdat DE de helft is van AB moet je alle afmetingen van $\triangle ABZ$met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen om de afmetingen van $\triangle DEZ$ te krijgen.
Dus geldt $AZ = 2 \cdot DZ \;\Rightarrow\; AZ : DZ = 2 : 1$
Ook geldt $BZ = 2 \cdot EZ \;\Rightarrow\; BZ : EZ = 2 : 1$
b) Zwaartelijnstelling 1 : In een driehoek verdelen twee zwaartelijnen elkaar in de verhouding 2:1

7a) Zwaartelijn BE verdeelt zwaartelijn AD in de verhouding 2:1
b) Zwaartelijn CF verdeelt zwaartelijn AD in de verhouding 2:1
c) te bewijzen: De zwaartelijnen AD, BE en CF snijden elkaar in *één* punt.
Bewijs: Laat Z_1 het snijpunt zijn van BEen AD en Z_2het snijpunt van CF en AD.
Uit a) volgt $AZ_1 : DZ_1 = 2 : 1$
Uit b) volgt $AZ_2 : DZ_2 = 2 : 1$
$$\left.\begin{array}{l} uit\, a)\, volgt\, AZ_1 : DZ_1 = 2 : 1 \\ uit\, a)\, volgt\, AZ_2 : DZ_2 = 2 : 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Z_1 \text{en } Z_2 \text{ delen dus beide } AD \text{ in de verhouding 2:1.}$$
Hieruit volgt dat $Z_1 = Z_2$

conclusie: De zwaartelijnen snijden elkaar in *één* punt.
d) **Zwaartelijnstelling 2:** De zwaartelijnen van een driehoek gaan door *één* punt.

KERN 2
DOOR 1 PUNT OF OP 1 LIJN

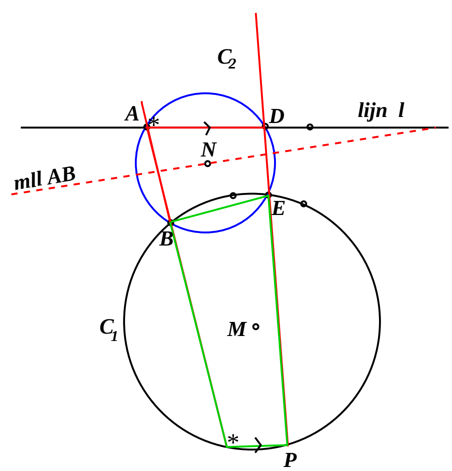
8)



In de figuur is de constructie uitgevoerd voor drie verschillende cirkels c_2 , allemaal met middelpunt op de middelloodlijn van AB . Kennelijk klopt de bewering dat alle lijnen DE door hetzelfde punt P gaan.

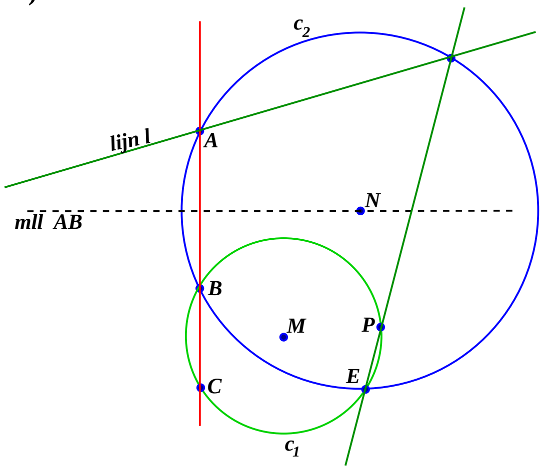
9) De loodlijn vanuit M op l is de symmetrie-as van de figuur. Dus is ook P het spiegelbeeld van C.

10) Gegevens volgens de figuur met $CP \parallel l$.
a) Als $\angle PED = 180^o$is de hoek een gestrekte hoek en moet dus P op de lijn door E en D liggen.
b) **te bewijzen:** $\angle PED = 180^o$
bewijs: Teken de koorden CP en BE
$CP \parallel l \;\Rightarrow\; \angle PCB + \angle BAD = 180^o$
$CPEB$ is een koordenvierhoek
$\Rightarrow\; \angle PCB + \angle PEB = 180^o$
Hieruit volgt dat $\angle BAD = \angle PEB$
$ABED$ is een koordenvierhoek
$\Rightarrow\; \angle BAD + \angle BED = 180^o$
$\underset{\angle BAD=\angle PEB}{\Longrightarrow} \angle PEB + \angle BED = 180^o \;\Rightarrow$
$\angle PED = \angle PEB + \angle BED$ is een gestrekte hoek $\Rightarrow$ P ligt op de lijn ED.



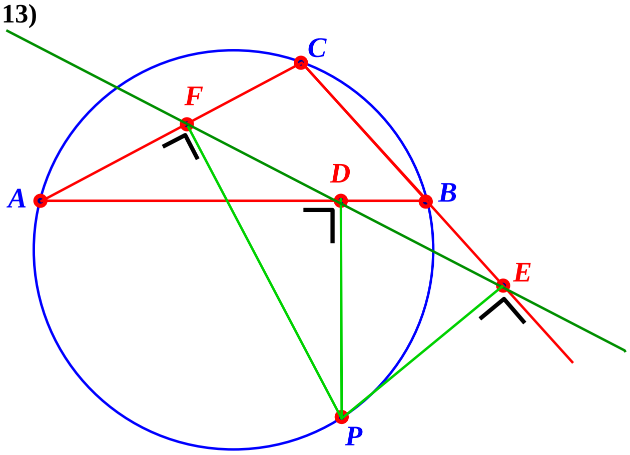
11) Gegevens volgens de figuur met $CP \parallel l$
a) $\angle PCB = \angle PEB$, omdat ze beide omtrekshoeken zijn op boog PB.
b) te bewijzen: $\angle PED = 180^o$
Bewijs: $\angle PCB = \angle BAD$ (Z-hoeken)
$\angle BED + \angle BAD = 180^o$(koordenvierhoekstelling)
Nu geldt : $\angle PED = \angle PEB + \angle BED = \angle PCB + (180^o - \angle BAD) = \angle PCB + 180^o - \angle PCB = 180^o$.
$\angle PED$ is dus een gestrekte hoek $\Rightarrow$ P ligt op ED .

12)



Te bewijzen: Pligt (nog steeds) op lijn ED.
Bewijs: In koordenvierhoek $EPBC$ geldt
$\angle EPC = \angle EBC$ (omtrekshoeken op boog CE)
Verder geldt: $\angle EBC + \angle EBA = 180^o$
(gestrekte hoek)
en ook $\angle EDA + \angle EBA = 180^o$
(koordenvierhoekstelling in $ABED$)
Hieruit volgt dat $\angle EBC + \angle EDA$
Omdat $\angle EBC = \angle EPC$ geldt tenslotte
$\angle EPC = \angle EDA$.
Omdat $PC \parallel DA$ en
$\angle EPC = \angle EDA$ volgt dat
EDP *één* lijn is, anders kunnen de F-hoeken
bij evenwijdige lijnen niet gelijk zijn.

13)



14a)
Omdat de hoeken bij D en E recht zijn, liggen D en E op een cirkel met middellijn BP .
(stelling van Thales)
Hieruit volgt dat $EDBP$ een koordenvierhoek is zo dat $\angle DEP + \angle DBP = 180^o$.
b) $ABPC$ is een koordenvierhoek waaruit volgt dat $\angle ABP + \angle ACP = 180^o$.
Maar $\angle ABP = \angle DBP$ en $\angle ACP = 180^o - \angle FCP$ (gestrekte hoek)
Hieruit volgt dat $\angle DBP = \angle FCP$
c) Omdat de hoeken bij E en F recht zijn, liggen E en F op een cirkel met middellijn CP.
(stelling van Thales)
Hieruit volgt dat $\angle FCP = \angle FEP$ (omtrekshoeken op boog FP)
d) te bewijzen: D, E en F liggen op *één* rechte lijn.
Bewijs: Het bewijs is geleverd als je knt aantonen dat $\angle DEF$ een gestrekte hoek is,
dwz. dat $\angle DEF = 180^o$.
$\angle DEF = \angle DEP + \angle FEP = (180^o - \angle DBP) + \angle FEP = (180^o - \angle FCP) + \angle FCP = 180^o$
waarbij gebruik is gemaakt van wat er bij a,b en c gevonden is.