[1][2]

UITWERKINGEN VOOR HET VWO B2

HOOFDSTUK 3

CIRKELS EN HOEKEN

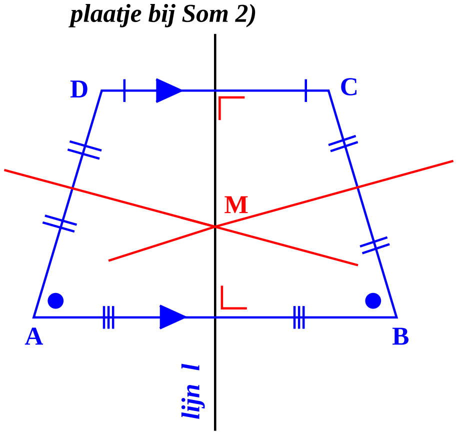
KERN 1

KOORDENVIERHOEK

1a) Ja, want in elke rechthoek zijn de diagonalen even lang en snijden de diagonalen elkaar middendoor.
Het snijpunt ligt dus even ver van alle vier hoekpunten.
b) Nee. In een willekeurig parallellogram zijn de diagonalen niet altijd evenlang.

2

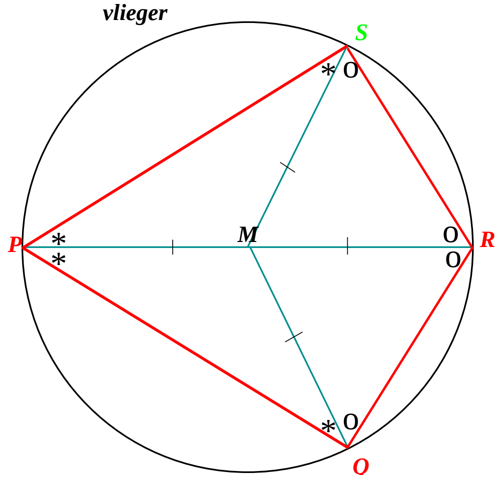
plaatje bij Som 2)



Teken de middelloodlijn door AB en DC.
Vanwege de symmetrie vallen deze middelloodlijnen samen.
Vanwege de symmetrie snijden de middelloodlijnen van ADen BC elkaar in een punt op l .
Dat punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
$ABCD$ is dus een koordenvierhoek.
Dit geldt voor elk gelijkbenig trapezium.

3a) In het midden van PR (de symmetrie-as)
b)

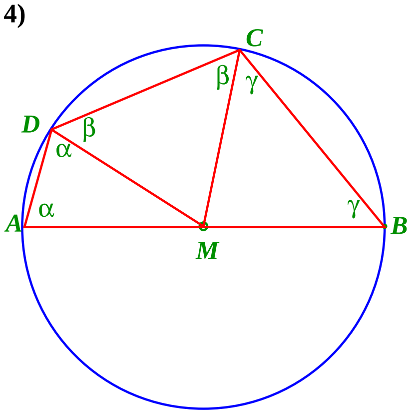
vlieger



$PM = QM = RM = SM$
Vanwege de symmetrie is $\angle MPS = \angle MPQ$
Omdat $MP = MS = MQ$ is ,
is $\angle MSP = \angle SPM = \angle MPQ = \angle PQM$
Dezelfde redenatie geldt voor de andere vier hoeken :
$\angle MSR = \angle MRS = \angle MRQ = \angle MQR$
Hieruit volgt : $4 \cdot \bigstar + 4 \cdot \bigcirc = 360^o$
Dus $\bigstar + \bigcirc = 90^o$
$PQRS$ is een koordenvierhoek als de hoeken bij Q en S recht zijn.

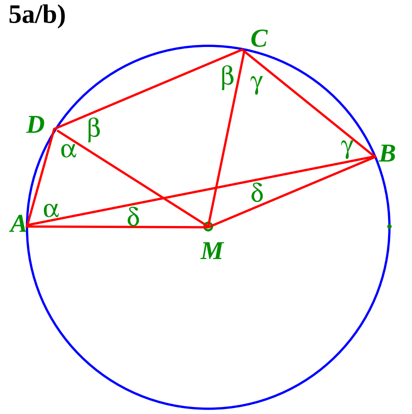
[1] *werd gemaakt onder LinuX met LaTeX en LyX*
[2] *Typ&andere fouten&blunders graag Melden!*

4)



$2\alpha+2\beta+2\gamma=360^o \;\Rightarrow\; \alpha+\beta+\gamma=180^o$
dus $\alpha+(\beta+\gamma)=180^o \;\Rightarrow\; \angle A+\angle C=180^o$.

5a/b)

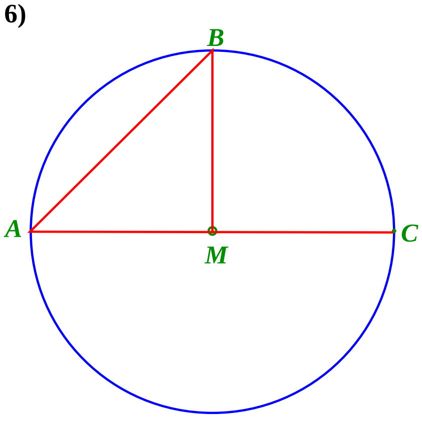


Trek MA, MB, MC en MD.
$(\alpha-\delta)+\alpha+2\beta+\gamma+(\gamma-\delta)=360^o$
$2\alpha+2\beta+2\gamma-2\delta=360^o$
$\alpha+\beta+\gamma-\delta=180^o$
$(\alpha+\beta)+(\gamma-\delta)=180^o \;\Rightarrow\; \angle D+\angle B=180^o$
of
$(\alpha-\delta)+(\beta+\gamma)=180^o \;\Rightarrow\; \angle A+\angle C=180^o$

.

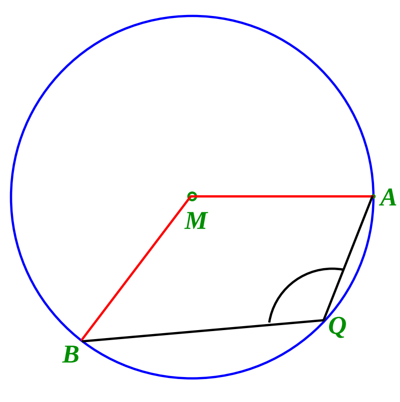
Kern 2
Hoeken in een cirkel

6)



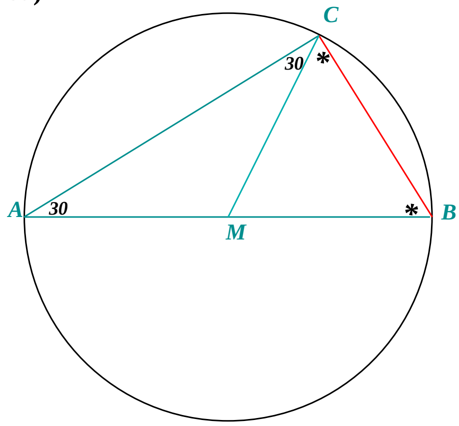
b) Boog AB is een kwart van de omtrek.
$\measuredangle AMB=90^o$.
c) $\triangle CMB$ is een gelijkbenige driehoek.
$CM=MB$
$\measuredangle CMB=90^o \;\Rightarrow\; \measuredangle MCB=\measuredangle CBM=45^o$
De omtrekshoek ACB is dus 45^o.

7)



a) zie hierboven
b) Boog AB is $\frac{2}{3}$ van de omtrek
$\Rightarrow\; \measuredangle AMB=\frac{2}{3}\cdot 360^o=240^o$
c) De hoek bij Q is stomp.

8a)



$\triangle AMC$ is gelijkbenig

$\Rightarrow\ \measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 30^o\ \Rightarrow$

$\measuredangle AMC = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o\ \Rightarrow$

$\measuredangle BMC = 60^o$

of

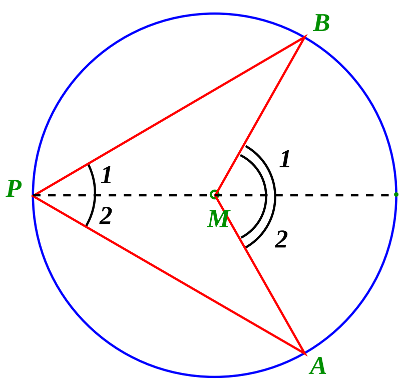
omdat het middelpunt M van de cirkel in het midden van AB ligt is $\measuredangle C = 90^o$ en $\measuredangle B = 60^o$

$\Rightarrow\ \measuredangle BCM = 60^o\ \Rightarrow\ \measuredangle BMC = 60^o$.

De waarnemer ziet dus koorde (en boog) BC onder een hoek van 60^o als hij zich in Mbevindt.

b) $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ deel van een volle hoek $\Rightarrow$ Boog BC is $\frac{1}{6}$ deel van de omtrek van de cirkel.

9



te bewijzen: $\angle P = \frac{1}{2}\angle M$

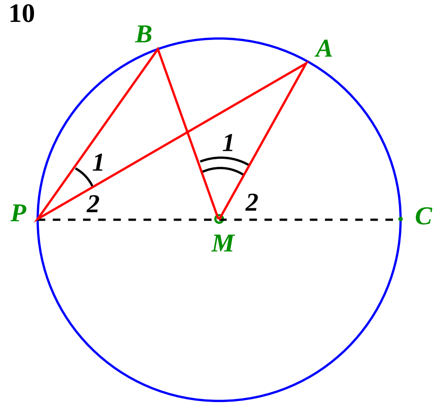
bewijs : Volgens geval (1) geldt

$\angle P_1 \frac{1}{2}\angle M_1$ en $\angle P_2 = \frac{1}{2}\angle M_2$

$\angle P = \angle P_1 + \angle P_2 = \frac{1}{2}\angle M_1 + \frac{1}{2}\angle M_2 =$

$\frac{1}{2}(\angle M_1 + \angle M_2) = \frac{1}{2}\angle M$

10



te bewijzen : $\angle P = \frac{1}{2}\angle M$

(dwz. $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AMB$)

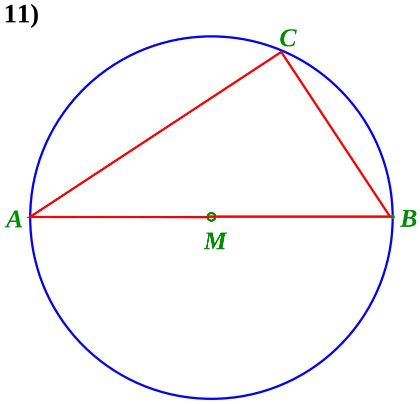
bewijs : Bij boog CB geldt $\angle P_{1,2} = \frac{1}{2}\angle M_{1,2}$

Bij boog CA geldt $\angle P_2 = \frac{1}{2}\angle M_2$

$\angle P_1 = \angle P_{1,2} - \angle P_2 = \frac{1}{2}\angle M_{1,2} - \frac{1}{2}\angle M_2 =$

$\frac{1}{2}(\angle M_{1,2} - \angle M_2) = \frac{1}{2}\angle M_1$

11)



a)

te bewijzen : C ligt op cirkel met middellijn $AB\ \Rightarrow\ \measuredangle ACB = 90^o$

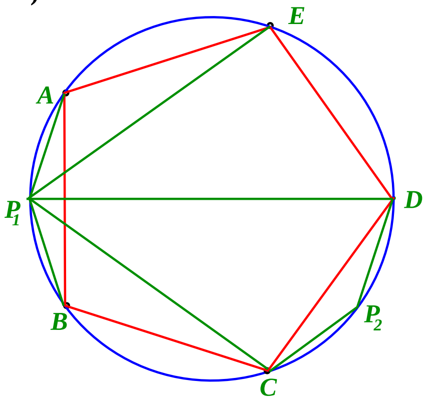
bewijs : De middelpuntshoek op boog AB is 180^o($\angle AMB$ is een gestrekte hoek, dus 180^o)

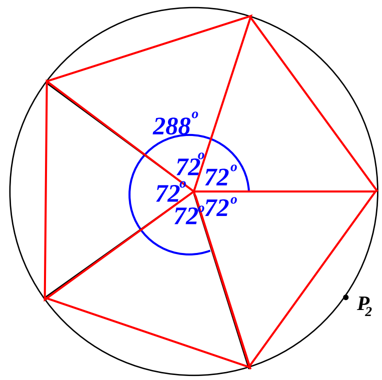
Hieruit volgt dat de omtrekshoek op boog AB de helft is van 180^o. Dus $\measuredangle ACB = 90^o$.

b) De stelling van Thales:

Als in driehoek ABC hoek C recht is , ligt C op de cirkel met middellijn AB.

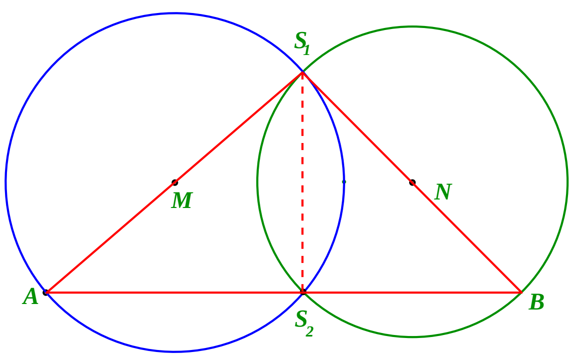
12)





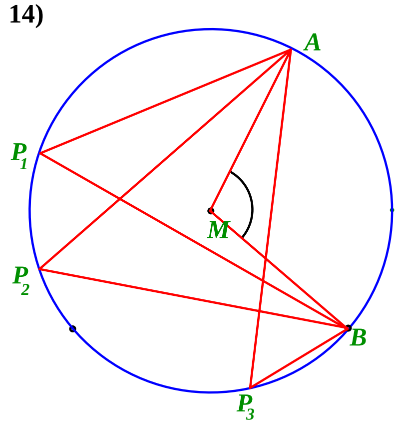
Vanuit P_1 zie je zijde CD onder een hoek van $\frac{1}{2} \cdot 72^o = 36^o$.
Vanuit P_2 zie je zijde CD onder een hoek van $\frac{1}{2} \cdot 288^o = 144^o$.

13)



te bewijzen: A, S_2 en B liggen op *één* lijn.
bewijs: $\angle AS_2S_1 = \frac{1}{2}\angle AMS_1 = 90^o$
$\angle BS_2S_1 = \frac{1}{2}\angle BNS_1 = 90^o$
$\angle AS_2B = 180^o$en is dus een gestrekte hoek.

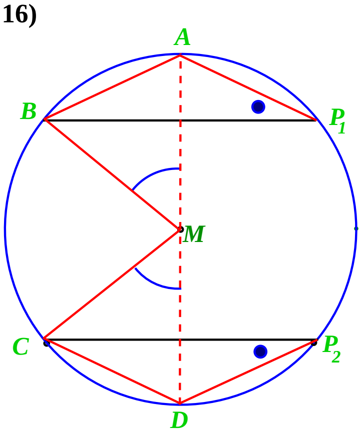
14)



Elke omtrekshoek is volgens de stelling gelijk aan de helft van de bijbehorende middelpuntshoek.
Alle omtrekshoeken horende bij een bepaalde boog moeten dus gelijk zijn.

15)
Gegevens volgens de figuur
te bewijzen : $\triangle BCE \sim \triangle BDS$
bewijs: $\angle B$ is gemeenschappelijk en $\angle ACB = \angle BDC$ (omtrekshoeken op gelijke koorden, $\triangle ABC$ is gelijkbenig $\Rightarrow$ $\angle ACB = \angle BDC$). Hieruit volgt de gelijkvormigheid volgens geval *hh*.

16)

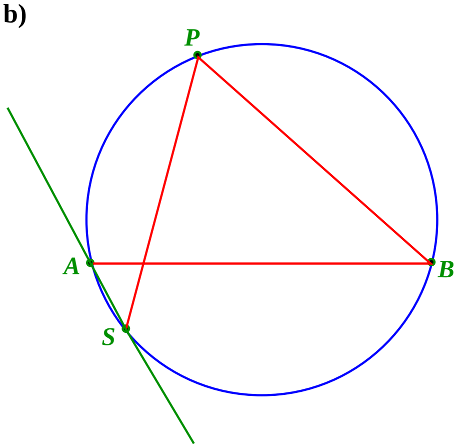


gegeven: omtrekshoeken $\angle P_1 = \angle P_2$ zijn gelijk.
te bewijzen: Boog *AB* = Boog *CD*

bewijs:
$\angle AMB = 2 \cdot \angle AP_1B$ en $\angle CMD = 2 \cdot \angle AP_2B$
Omdat $\angle P_1 = \angle P_2$ geldt dat $\angle AMB = \angle CMD$
volgens geval ZHZ.
Hieruit volgt dat zijde *AB*= zijde *CD* en verder dat boog *AB* = boog *CD*, hetgeen bewezen moest worden.

17a) $\angle SAB = \angle SPB$. (gelijke koorden $\Rightarrow$ gelijke omtrekshoeken)

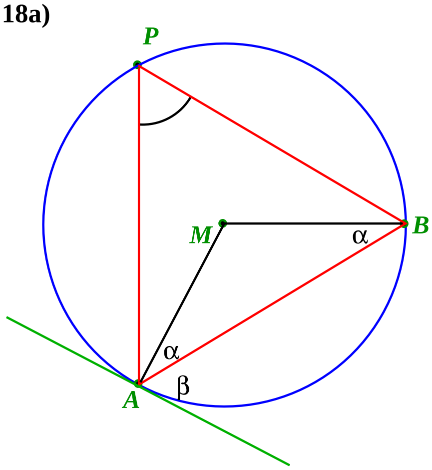
b)



Nog steeds $\angle SAB = \angle SPB$ .Anders gezegd: de hoek die de koorde *AS* maakt met *AB* is gelijk aan de omtrekshoek op koorde (en boog) *SB*.

c)
Als *S* in *A* valt is koorde *SB* gelijk aan koorde *AB* en de koorde *AS* is de raaklijn aan de cirkel in *A* geworden.
De hoek die deze raaklijn maakt met *AB* is nu gelijk aan de omtrekshoek op koorde *AB*.

18a)



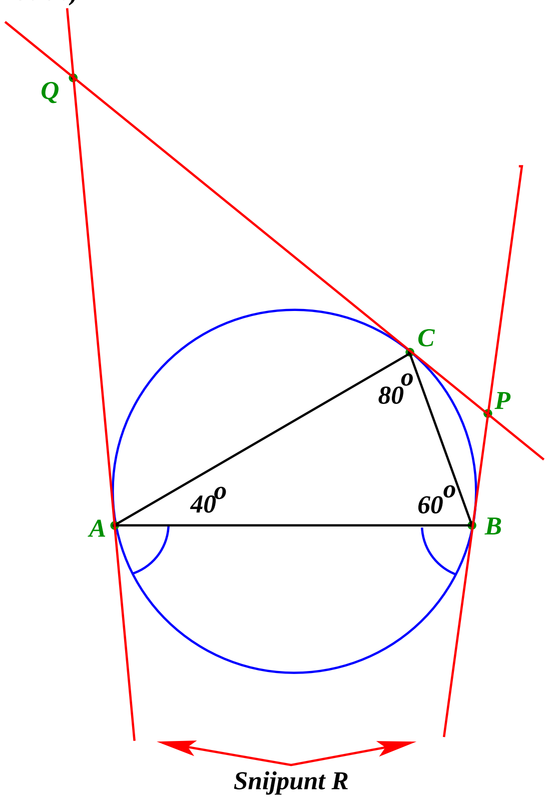
.

b) Gegevens volgens de figuur
te bewijzen: $\angle AMB = 2 \cdot \beta$
bewijs:
Bij *A* geldt $\alpha + \beta = 90^o \;\Rightarrow\; \alpha = 90^o - \beta$.
Dus $\angle AMB = 180^o - 2\alpha = 180^o - 2(90^o - \beta) = 180^o - 180^o + 2\beta = 2\beta$

c) Als $\beta = 90^o$moet de koorde *AB* een middellijn zijn van de cirkel.
De stelling geldt dan nog steeds, want $\angle AMB$ is in dat geval $180^o = 2 \cdot 90^o$.

d) Laat *P* een willekeurig punt zijn op de cirkel (aan dezelfde kant van koorde *AB* als M).
Dan geldt: $\angle APB = \frac{1}{2} \cdot \angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 2\beta = \beta$.
Hiermee is bewezen dat de omtrekshoek op koorde *AB* gelijk is aan de hoek die de raaklijn in *A* (of in *B*) met de koorde *AB* maakt.

19abc)



d)

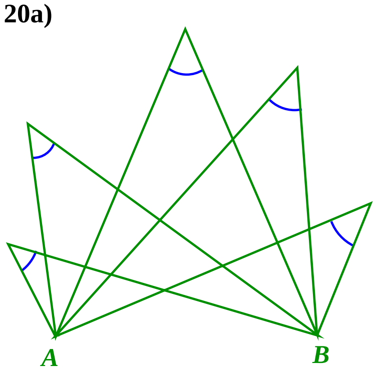
$\angle RAB = \angle RBA = \angle ACB = 80^o \Rightarrow \angle R = 180^o - 2 \cdot 80^o = 20^o$.

Op dezelfde manier:

$\angle P = 180^o - 2 \cdot 40^o = 100^o$en $\angle Q = 180^o - 2 \cdot 60^o = 60^o$

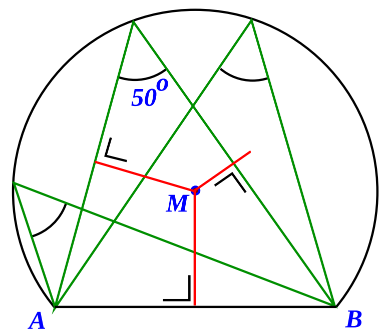
KERN 3
STELLINGEN OMKEREN

20a)



b) De hoekpunten liggen op een cirkel die door A en B gaat en waarvan de middelpuntshoek op koorde AB gelijk is aan 100^o.

21)

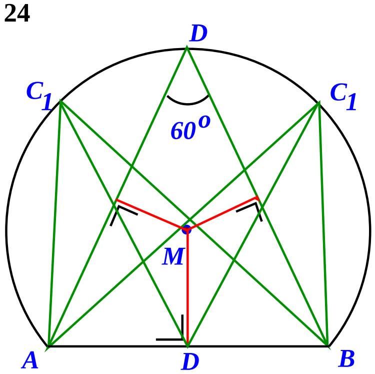


22a)
$\angle C_3 = \angle C_1$ volgens de omtrekshoekstelling
b) Zie $\triangle AC_2C_3$:
$\angle AC_2B = \angle C_2AC_3 + \angle C_2C_3A$
volgens de buitenhoekstelling.
$\angle C_2AC_3 > 0 \;\Rightarrow\; \angle AC_2B > \angle C_2C_3A$
c) Gegeven was : $\angle C_1 = \angle C_2$
$(=\angle C_2C_3A)=\angle C_3$
$\angle C_2$ kan dus niet binnen de cirkelboog liggen.

.

23a)
$\angle C_3 = \angle C_1$ volgens de omtrekshoekstelling
b) $\angle AC_3B = \angle C_3AC_2 + \angle C_3C_2A$
(buitenhoekstelling)
$\angle C_3AC_2 > 0 \;\Rightarrow\; \angle AC_3B > \angle AC_2B$
c) Gegeven was echter dat
$\angle C_2 = \angle C_1 = \angle C_3 = \angle AC_3B$
C_2 kan dus niet buiten de cirkelboog liggen.

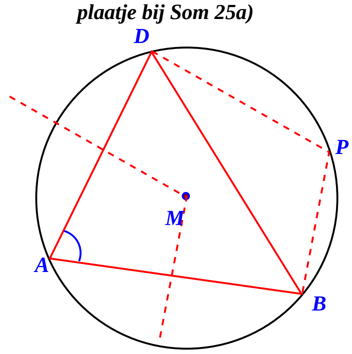
24



a) Kies bijvoorbeeld $\angle A = \angle B = 60^o$ en construeer m.b.v. de middelloodlijnen het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
b) De zwaartelijn uit C eindigt in het midden D van AB. Teken een cirkel met straal 5 en middelpunt D.
C moet liggen in een snijpunt van deze cirkel met de eerste cirkel. Er zijn twee mogelijkheden die echter onderling congruente driehoeken opleveren.

25)
Gegeven : in vierhoek $ABCD$ geldt
$\angle A + \angle C = 180^o$
te bewijzen: $ABCD$ is een koordenvierhoek
bewijs:
a)
Contstrueer het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$
m.b.v. de middelloodlijnen van AB en AD.
P is een punt op die cirkel.
$ABPD$ is een koordenvierhoek. Daarom geldt dat $\angle A + \angle P = 180^o$.

plaatje bij Som 25a)



b) Uit $\angle A + \angle P = 180^o$en $\angle A + \angle C = 180^o$
volgt dat $\angle P = \angle C$.
c) Punt C ligt ook op boog BPD volgens de omgekeerde stelling van bldz. 72.
'Als gegeven is dat:
-een aantal hoeken even groot zijn,
-de benen van die hoeken door de vaste punten A en B gaan,
-de hoekpunten aan dezelfde kant van AB liggen,
dan kun je concluderen : de hoekpunten liggen op een cirkelboog door A en B .'

26) De stelling van Thales is een bijzonder geval van de omgekeerde koordenvierhoekstelling.
Het bijzondere is dat naast, in dit geval $\angle A + \angle D = 180^o$geldt ook dat $\angle A = \angle D = 90^o$.

KERN 4
OVER BEWIJZEN

27a) P in opgave 22 en 23:
- $\angle C_1 = \angle C_2$
- de benen van deze hoeken gaan door A en B
- de hoekpunten liggen aan dezelfde kant van AB

b) Q in opgave 22 en 23:
- C_1 en C_2 liggen op een cirkelboog door A en B.

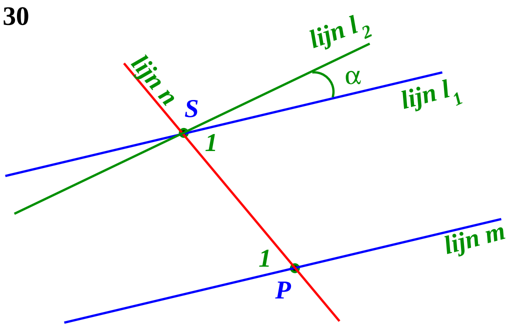
28a) Je moet gegeven en conclusie verwisselen
b) Je gaat er vanuit dat de conclusie onjuist is en toont aan dat dat leidt tot tegenspraak met het gegeven.

$\boxed{als\, P \Rightarrow Q;\, niet\, Q \Rightarrow niet\, P}$

.

29a) gegeven : lijn l en punt P buiten l
te bewijzen: door P kun je maar *één* loodlijn tekenen op l .
indirect bewijs: stel PP' en PQ' zijn beide loodlijnen op l en P' en Q' vallen niet samen.
In $\triangle PP'Q'$ zijn de hoeken bij P' en Q' beide 90^o en de hoek bij P groter dan 0^o. De hoekensom in $\triangle PP'Q'$ is nu groter dan 180^o. Dit kan niet en daarom kan de aanname dat P' en Q' niet samenvallen onjuist zijn. P' en Q' moeten dus hetzelfde punt zijn en daarmee is bewezen dat er uit P maar *één* loodlijn op l mogelijk is.
b) De hoeken binnen een driehoek zijn samen 180^o.

30



a) gegeven: lijn m en punt S niet op m.
te bewijzen: door S is maar *één* lijn evenwijdig aan m te tekenen.

indirect bewijs:
stel dat er door S twee verschillende lijnen $l_1$en l_2 lopen, beide evenwijdig aan m.
Omdat l_1 en l_2 niet samenvallen maken ze een hoek α met elkaar. ($\alpha > 0$)
Teken een lijn n door S die m snijdt in P.
Omdat $m \,||\, l_1$ geldt $\angle P_1 = \angle S_1$en
omdat $m \,||\, l_2$geldt $\angle P_1 = \angle S_1 + \alpha$
(Z-hoeken bij evenwijdige lijnen).
Hieruit volgt dat $\angle S_1 = \angle S_1 + \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \;\Rightarrow$
l_1 en l_2 vallen samen. Door S lopen niet twee verschillende lijnen evenwijdig aan m.

.

31) gegevens volgens de figuur
te bewijzen: $\angle EAB + \angle EDB = 180^o$
bewijs: in de rechthoekige driehoeken $\triangle AEB$ en $\triangle ADB$ is AB de gemeenschappelijke schuine zijde.
Volgens de stelling van Thales (zie som 11) liggen E en D op de cirkel met ABals middellijn.
Vierhoek $ABCD$ is dus een koordenvierhoek waarvoor geldt dat de som van overstaande hoeken $180^o$is (koordenvierhoekstelling)
Hieruit volgt dat $\angle EAB + \angle EDB = 180^o$.

32) We onderzoeken of de punten A, B, C en D op een cirkel liggen. We onderzoeken dan of $ABCD$ een koordenvierhoek is. We onderzoeken of de overstaande hoeken samen 180^ozijn.
(omgekeerde koordenvierhoekstelling)

$\triangle PAD$ is gelijkbenig $\Rightarrow\; \angle APD = \angle PDA = 40^o \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \angle CDQ = 40^o\,(overstaande\, hoeken) \\ \angle PAD = 100^o\,(som\, v.d.\, hoeken\, v.e.\, driehoek) \\ \angle CDA = 140^o(gestrekte\, hoek) \end{array} \right.$

$\angle PAD = 100^o \Rightarrow \angle BAD = 80^o$

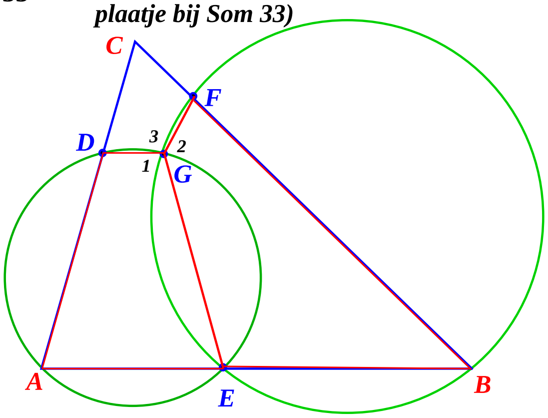
$$\left.\begin{array}{l}\angle DQC = 60^o \\ \angle QDC = 40^o\end{array}\right\} \underset{som\, v.d.\, hoeken}{\Rightarrow} \angle DCQ = 80^o \underset{gestrekte\, hoek}{\Rightarrow} \angle DCB = 100^o$$

$\angle ABD = 40^o$omdat de som van de hoeken in een vierhoek 360^o is.

In vierhoek $ABCD$ geldt nu dat $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^o$.
$ABCD$ is dus een koordenvierhoek. De punten A, B, C en D liggen op een cirkel.

33

plaatje bij Som 33)



$AEGD$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle A + \angle G_1 = 180^o$
$EBFG$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle B + \angle G_2 = 180^o$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle G_1 = 180^o \\ \angle B + \angle G_2 = 180^o\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle G_1 + \angle G_2 = 360^o$$

$$\left.\begin{array}{r}\angle G_1 + \angle G_2 + \angle G_3 = 360^o \\ \angle A + \angle B + \angle G_1 + \angle G_2 = 360^o\end{array}\right\} \underset{bovenste-onderste}{\Longrightarrow} \angle G_3 - \angle A - \angle B = 0^o \Rightarrow \angle G_3 = \angle A + \angle B$$

$$\left.\begin{array}{r}\angle A + \angle B + \angle C = 180^o \\ \angle A + \angle B = \angle G_3\end{array}\right\} \Rightarrow \angle G_3 + \angle C = 180^o \Rightarrow$$ $DFGC$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling)

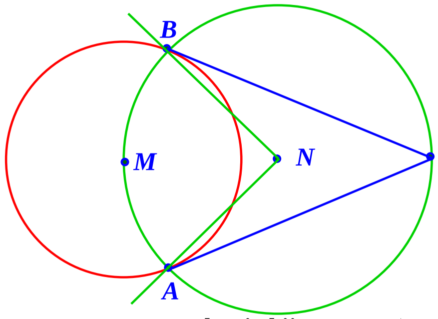
De punten D, F, G en C liggen dus op een cirkel

34)
te bewijzen: A, B, C en D liggen op een cirkel. Dus $\angle DAB + \angle C = 180^o$
bewijs:
$\angle DAB = \angle PAQ$; $\angle A = 360^o - \angle PAQ$
a) $\angle A + \angle Q_1 + \angle S + \angle P_2 = 360^o \Rightarrow 2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle Q_1 + 2 \cdot \angle S + 2 \cdot \angle P_2 = 720^o$
b) $\angle A + \angle Q + \angle C + \angle P = 360^o \Rightarrow \angle A + 2 \cdot \angle Q_1 + \angle C + 2 \cdot \angle P_2 = 360^o$
antwoord van a) - antwoord van b)
$\angle A + 2 \cdot \angle S - \angle C = 720^o - 360^o = 360^o \Rightarrow$
$\angle A + 180^o - \angle C = 360^o \Rightarrow \angle A - \angle C = 180^o$

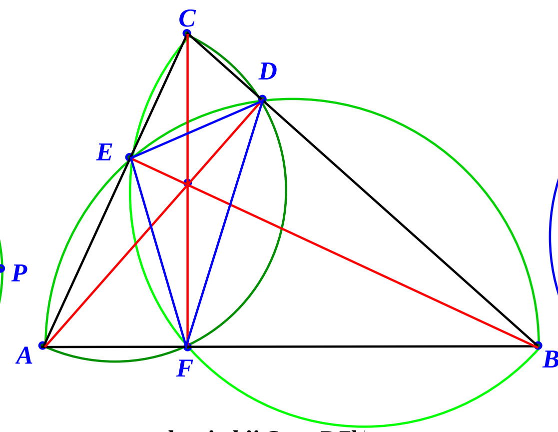
$$\left.\begin{array}{r}\angle A - \angle C = 180^o \\ \angle A = 360^o - \angle DAB\end{array}\right\} \Rightarrow 360^o - \angle DAB - \angle C = 180^o \Rightarrow \angle DAB + \angle C = 180^o$$

De punten A, B, C en D liggen dus op een cirkel.

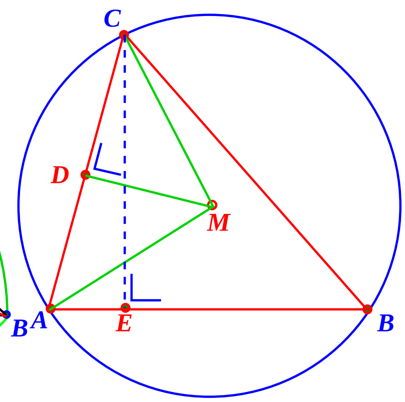
plaatje bij Som D1)



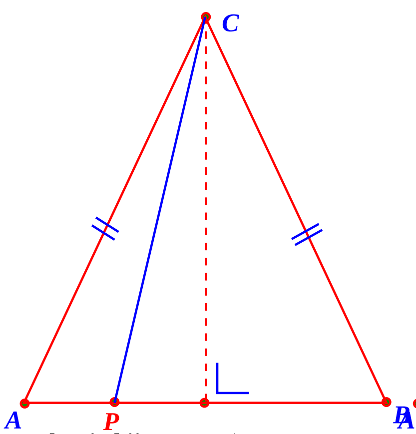
plaatje bij Som D4)



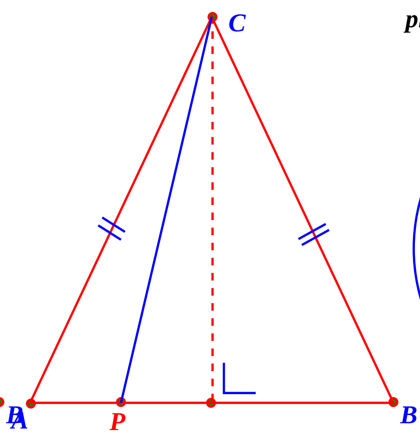
plaatje bij Som D6)



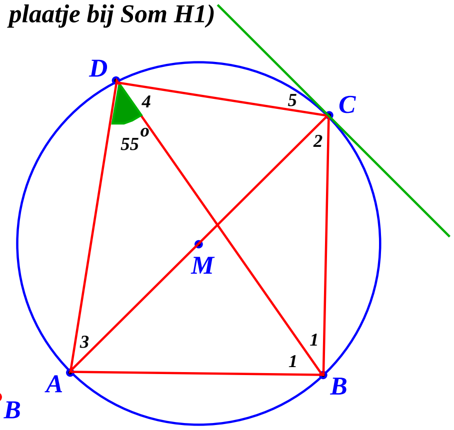
plaatje bij Som D7a)



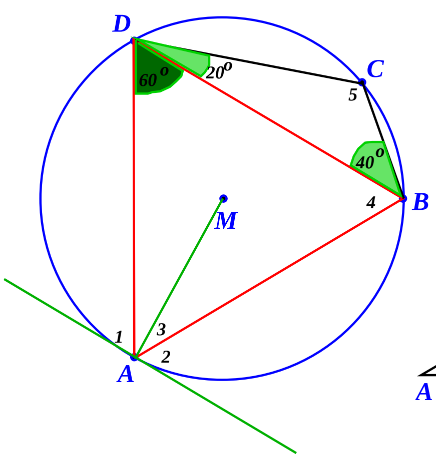
plaatje bij Som D7b)



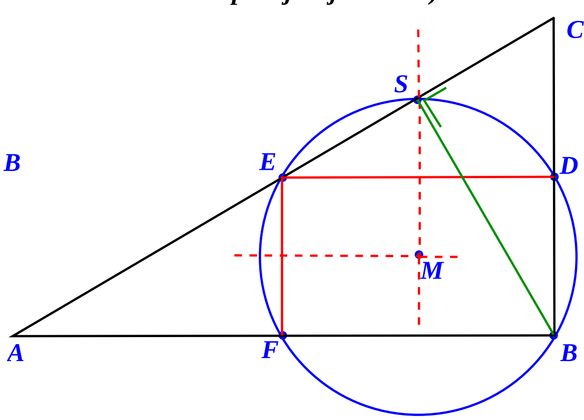
plaatje bij Som H1)



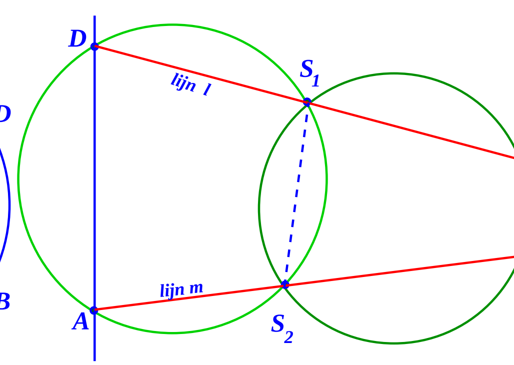
plaatje bij Som H2)



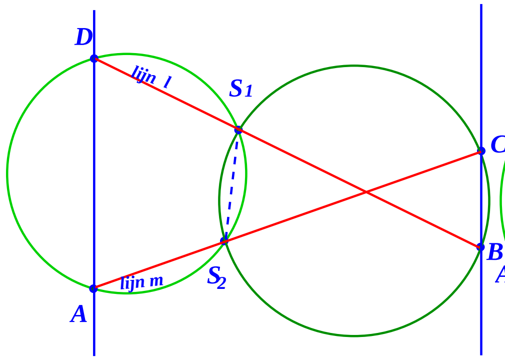
plaatje bij Som H4)



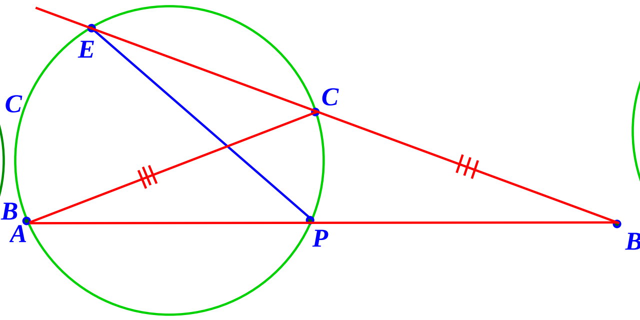
plaatje bij Som H5a)



plaatje bij Som H5b)



plaatje bij Som H8a)



plaatje bij Som