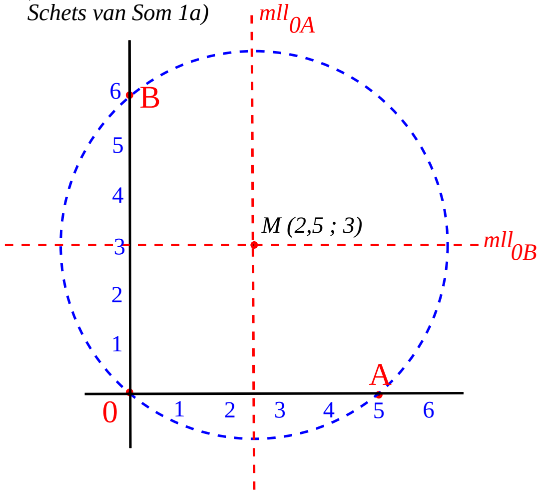
12

UITWERKINGEN VOOR HET VWO
B2

HOOFDSTUK 2

DRIEHOEKEN & VIERHOEKEN
Kern 1
EEN CIRKEL OM EEN DRIEHOEK

1a)
Schets van Som 1a)



1b)
Middelpunt in $M(2\frac{1}{2};3)$

Straal is $\sqrt{\left(2\frac{1}{2}\right)^2+3^2}=\sqrt{15\frac{1}{4}}$

1c) M is het snijpunt van de middenloodlijnen van OA en OB

Om $de\ radius\ \ r$ te berekenen gebruik je de stelling van $Pythagoras$

2a)

$MA=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$MB=\sqrt{3^2+4^2}=5$

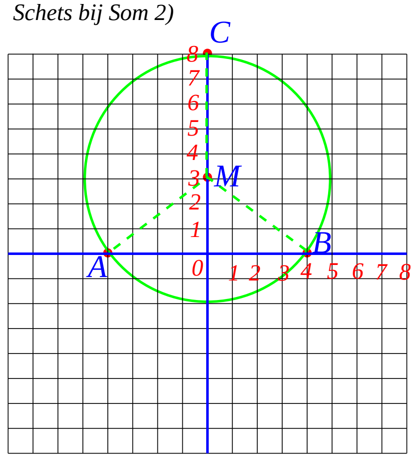
$MC=5$

2b) $y=8$

2c) De lengte van de koorde door $(4;0)$ en $(0;3)$ gaat door het middelpunt

$lengte=2*Straal=2\cdot r=10$

Schets bij Som 2)



---

[1] werd gemaakt onder LinuX met LaTeX en LyX

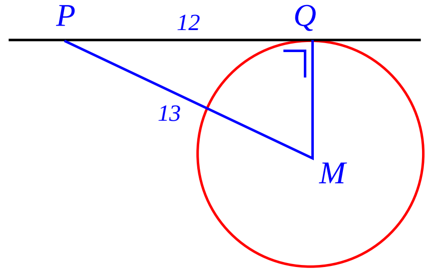
[2] Typ&andere fouten&blunders graag Melden!

3a&b)

$PQ \perp MQ \xrightarrow{Pythagoras} PQ^2+MQ^2=MP^2 \;\Rightarrow$

$144+MQ^2=169 \Rightarrow \; MQ^2=25 \;\Rightarrow\; MQ=5$

plaatje bij Som 3)



4)
Gegeven: $MD \perp AB$
te Bewijzen: $AD = BD$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{c} MA=MB\ (Straal\ van\ de\ Cirkel) \\ MD=MD\ (M\ is\ Middelpunt\ van\ de\ Cirkel \\ \angle ADM=\angle BDM \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOM \cong \triangle BDM \;\Rightarrow\; AD=BD$$

5a)
Gegeven: Zie Plaatje

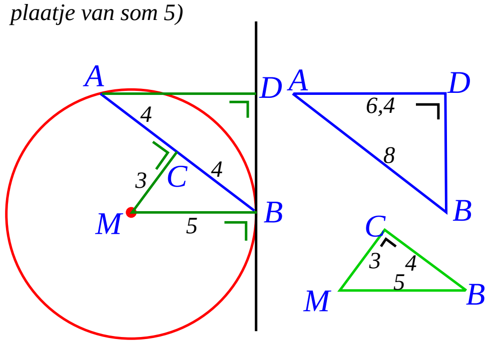
$$\left.\begin{array}{c} AB=8 \;\Rightarrow\; BC=4 \\ MB=5 \end{array}\right\} \Rightarrow\; MC=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

5b)
te Bewijzen: $\angle BMC = \angle CBD$

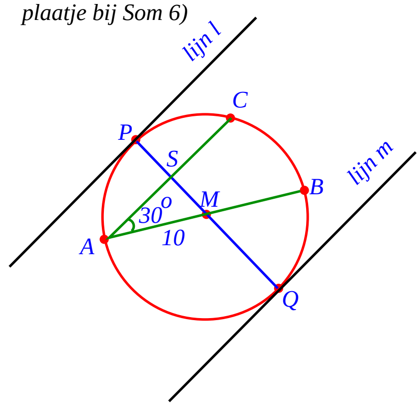
Bewijs: $\left.\begin{array}{c} \angle MCB=90^o \;\Rightarrow\; \angle BMC+\angle MBC=90^o \\ \angle CBD+\angle MBC=90^o \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BMC=\angle CBD$

5c) $\triangle MCB \sim \triangle BDA \xrightarrow{vlgs\,hh} \frac{MB}{BC}=\frac{AB}{AD} \;\Rightarrow\; \frac{5}{4}=\frac{8}{AD} \Rightarrow 5\cdot AD=32 \Rightarrow\; AD=\frac{32}{5}=6,4$

plaatje van som 5)



plaatje bij Som 6)



6a) Zie Schets
6b)

$$\sin 30^o=\frac{MS}{AM}=\frac{MS}{10} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} MS=10\cdot\sin 30^o=5 \\ MP=10 \end{array}\right\} \Rightarrow\; PS=5 \xrightarrow{Dus} \left\{\begin{array}{c} lijn\ l\ ligt\ 5\ van\ AC\ af \\ lijn\ m\ ligt\ 15\ van\ AC\ af \end{array}\right.$$

6c)

$$\sin 45^o=\frac{MS}{10} \;\Rightarrow\; MS=10\cdot\sin 45^o=10\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=5\sqrt{2} \xrightarrow{Dus} \left\{\begin{array}{c} lijn\ l\ ligt\ 10-5\sqrt{2}\ van\ AC\ af \\ lijn\ m\ ligt\ 10+5\sqrt{2}\ van\ AC\ af \end{array}\right.$$

7a) Vanwege de symmetrie ligt het raakpunt T op de diagonaal PR

$$\left.\begin{array}{r} PR=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2} \\ PT=4 \end{array}\right\} \Rightarrow\ RT=4\sqrt{2}-4$$

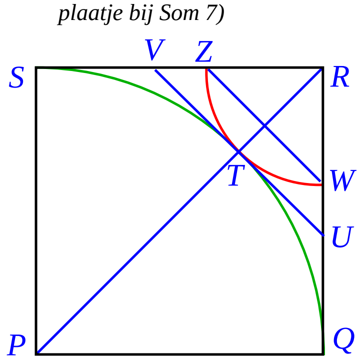
7b) $\triangle WZR$ is een "half" vierkant met $RZ=RW=4\sqrt{2}-4$

$ZW=SchuineZijde \longrightarrow ZW^2=RW^2+RZ^2=2\cdot\left(4\sqrt{2}-4\right)^2\ \Rightarrow\ ZW=\left(4\sqrt{2}-4\right)\cdot\sqrt{2}=8-4\sqrt{2}$

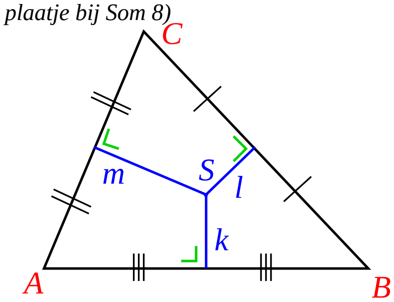
7c) $UT\perp RT\ \Rightarrow\ \triangle URT$ is een "half" vierkant met $UT=TR$ ($\angle TRU=45^o\ \Rightarrow\ \angle RUT=45^o$)

$UV=2\cdot UT=2\cdot TR\ \Rightarrow\ UV=2\cdot\left(4\sqrt{2}-4\right)\ \Rightarrow\ UV=8\sqrt{2}-8$

plaatje bij Som 7)



plaatje bij Som 8)



8a/b) Zie Plaatje

8c) Het is vermoeden is gerechtvaardigd dat de middelloodlijnen door een enkel punt gaan. Maar met deze schets is dat nog niet bewezen....denk aan de dikte van een potloodlijn...

9a) l bevat alle punten die evenver van B als van C ligt.

9b)

$$\left.\begin{array}{l} S\ ligt\ op\ k\ \Rightarrow\ SA=SB \\ S\ ligt\ op\ l\ \Rightarrow\ SB=SC \end{array}\right\} \Rightarrow\ SA=SB=SC$$

9c)

$$\left.\begin{array}{r} Neem\ een\ willekeurig\ punt\ P\ op\ m \\ m\ is\ middelloodlijn\ van\ AC \end{array}\right\} \Rightarrow\ P=S$$

9d)

Gegeven: $\triangle ABC$ met middelloodlijnen $k, l\ en\ m$

te Bewijzen: $k, l\ en\ m$ snijden elkaar in *één* punt.

Bewijs: Laat S het snijpunt zijn van k en l

$$\xrightarrow{Dan\ Geldt} \left.\begin{array}{l} S\ op\ k\ \Rightarrow\ SA=SB \\ S\ op\ l\ \Rightarrow\ SB=SC \end{array}\right\} \Rightarrow\ SA=SC \longrightarrow S\ ligt\ op\ middelloodlijn\ m$$

$\xrightarrow{Conclusie} k, l\ en\ m$ gaan *allemaal* door S

10a&b)Zie schetsje

10c) De middelloodlijnen snijden elkaar in het midden van VT

Gegeven: $k\ en\ l$ snijden elkaar in A

te Bewijzen: A ligt in het midden van VT

Bewijs:

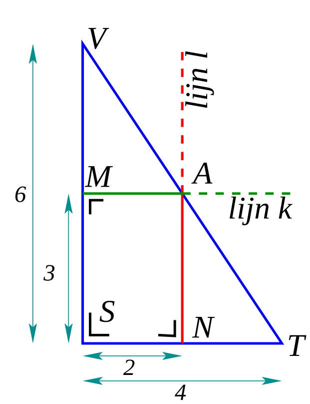
$\square SNAM$ is een Rechthoek$\longrightarrow MA=SN\ \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} ST=2\cdot SN=2\cdot MA \\ Verder\ Geldt:\ SV=2\cdot MV \\ \measuredangle M=\measuredangle S \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\triangle VMA \overset{zhz}{\sim} \triangle VST\ \Rightarrow\ \angle MVA=\angle SVT\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ A$ ligt op TV en wel in het midden.

plaatje bij som 10 a&b)



10d) $\xrightarrow{Pythagoras} AS^2 = SN^2 + NA^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AS = \sqrt{2^2 + 3^2} \Rightarrow AS = \sqrt{13}$

11a) Elke Rechthoek
11b) Elk parallellogram zonder rechte hoeken is een goed voorbeeld

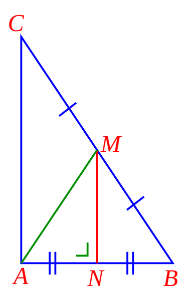
12) $\longrightarrow$Opgave 9)

13a)
Gegeven: $MC = MB$
te Bewijzen: $AM = MC = MB$
Bewijs:

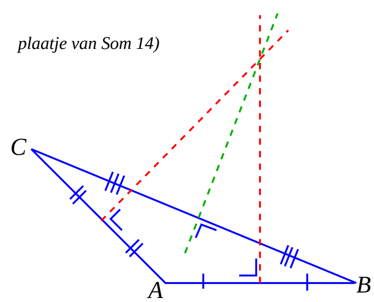
- Teken door M de lijn $k \perp AB$
- Lijn k snijdt AB in N
- $\triangle NBM \sim \triangle ABC \xleftarrow{Geval\ hh}$ *want* $\angle B$ is gemeenschappelijk en $\angle A = \angle N$

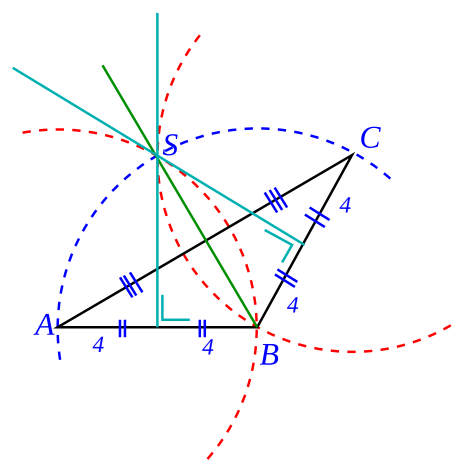
Hieruit volgt: $BA = 2 \cdot BN \xrightarrow{Dus} N$ *is het Midden van* AB en daarom is k de middenloodlijn van AM
$\Rightarrow AM = BM = CM$
13b)
$$\left.\begin{array}{r} AB = 8 \\ AC = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 15^2} = \sqrt{289} \Rightarrow BC = 17 \xrightarrow{De\ Straal\ is} r = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$

plaatje bij som 13)



plaatje van Som 14)



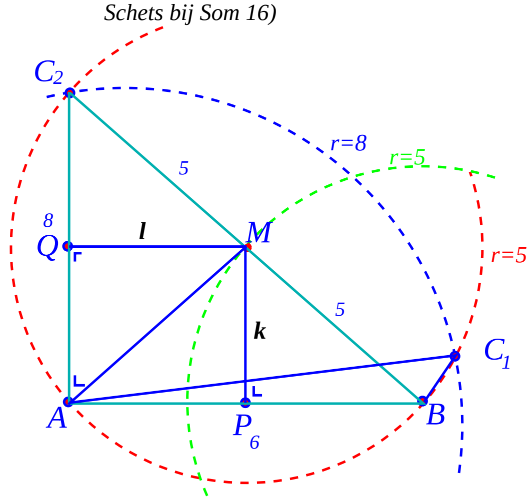


14) Als de driehoek een Stompe hoek bevat, lig met middelpunt van de omschreven cirkel buiten deze driehoek.

15) $BA = BC \Rightarrow$ middelloodlijn k van AC gaat door B
S is het Snijpunt van k en de middelloodlijn l van AB
$SA = SB \Rightarrow \angle SAB = \angle SBA = 60^o$ (halve tophoek in gelijkbenige $\triangle ABC$) $\Rightarrow \angle ASB = 60^o \xleftarrow{Hoekensom\ Driehoek}$
$\Rightarrow \triangle ASB$ is gelijkzijdig $\Rightarrow AS = AB = 8$
De straal van de Omschreven Driehoek is 8

16a)

Schets bij Som 16)



- $AB = 6$
- Teken Middelloodlijn van AB
- Teken vanuit B een cirkel met straal $r = 5$
- Het snijpunt van mll_{AB} en Cirkel is M
- Teken cirkel met Middelpunt M en $r = 5$
- Teken cirkel met Middelpunt M en $r = 8$
- Snijpunten zijn de twee plaatsen C_1 en C_2

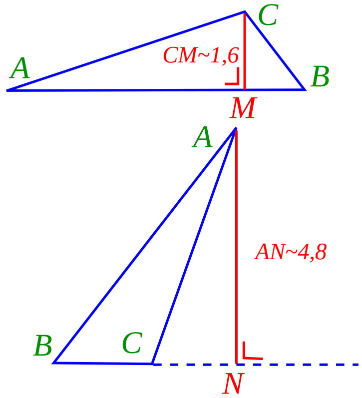
b)
Als $\angle BAC_2 = 90^o \;\Rightarrow\; BC_2 = 10$ (Stelling van Pythagoras)
Te bewijzen: $\angle BAC_2 = 90^o$
Bewijs: Teken door M middelloodlijnen k van AB en l van AC_2.
P is het snijpunt van k met AB en Q is het snijpunt van l met AC_2.
$MP = 4$ (St. van Pyth) en $MQ = 3$ (St. van Pyth.) $\Rightarrow$
$\triangle APM \cong \triangle MQA$ (congruentiegevalZZZ) $\Rightarrow$ $\angle A_1 = \angle M_2$ $\Rightarrow$
$l \,||\, AP$ (Z-hoeken) $\Rightarrow$ $\angle A_1 + \angle A_2 = \angle M_2 + \angle A_2 = 90^o$
(hoekensom driehoek MAQ)
conclusie: $\angle BAC_2 = \angle A_1 + \angle A_2 = 90^o$.

KERN 2
HOOGTELIJNEN

17a) $CM \perp AB$ $CM \approx 1,6$

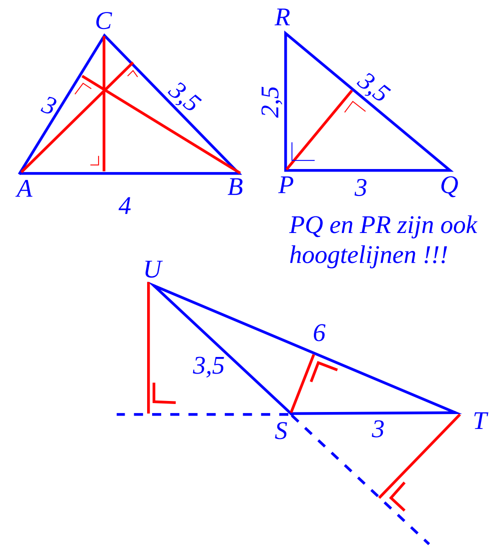
17b) $AN \perp BC$ $AN \approx 4,8$

Schets bij Som 17)



18)

Schetsen bij Som 18)

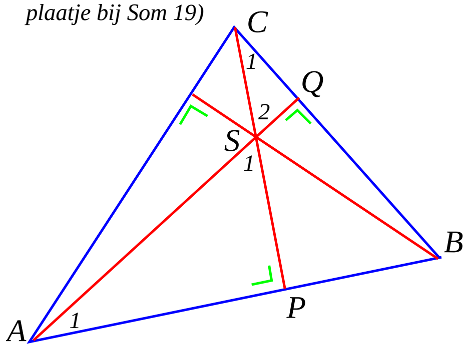


19) Zie schets

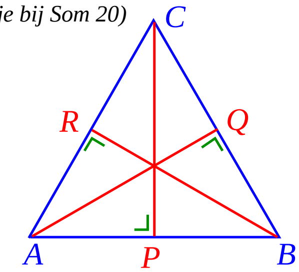
te Bewijzen: $\angle A_1 = \angle C_1$

Bewijs:
$$\left.\begin{array}{ll} \angle A_1 + \angle S_1 = 90^o & (Som\,van\,de\,hoeken\,van\,\triangle ASP) \\ \angle S_1 = \angle S_2 & (Overstaande\,Hoeken) \\ \angle C_1 + \angle S_2 = 90^o & (Som\,van\,de\,hoeken\,van\,\triangle CQS) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1$$

plaatje bij Som 19)



plaatje bij Som 20)



20a)
$CP \perp AB$ (hoogtelijn)
$CA = CB \Rightarrow C$ ligt op middenloodlijn van AB
Daarom moet CP de middenloodlijn zijn van AB
Op dezelfde manier is te bewijzen dat BR de middenloodlijn is van AC en dat AQ de middenloodlijn is van AB

20b) Omdat deze middenloodlijnen elkaar in *één* punt snijden, en de drie hoogtelijnen in dit geval samenvallen met deze drie middenloodlijnen , snijden dus in dit geval de drie hoogtelijnen elkaar ook in *één* punt.

21a) $ABCQ$ is een parallellogram,
want volgens de constructie geldt dat $CQ \,||\, AB$ en $AQ \,||\, BC \;\Rightarrow\; AB = CQ$

$$\boxed{\textit{in elke parallellogram zijn de overstaande Zijden evenlang!!!}}$$

21b) $ABPC$ is een parallellogram,
want volgens de constructie geldt dat $BP \,||\, AC$ en $CP \,||\, AB \;\Rightarrow\; AB = CP$

21c)

$$\left.\begin{array}{l} CQ = AB \\ CP = AB \end{array}\right\} \Rightarrow\; CQ = CP \;\Rightarrow\; C \text{ is het midden van } QP$$

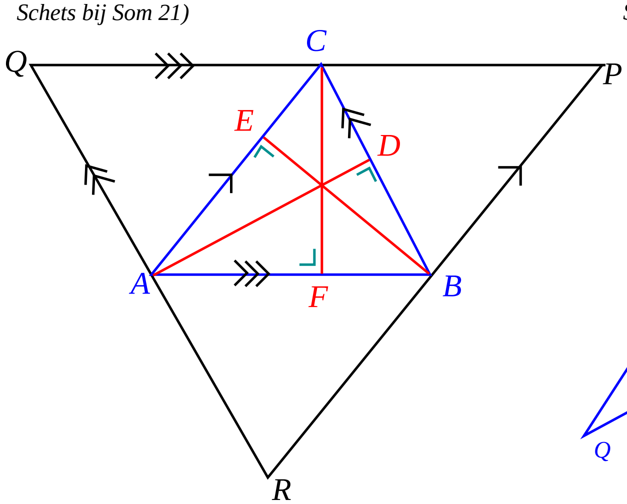
21d)

$$\left.\begin{array}{l} CF \perp AB \\ AB \,||\, QP \end{array}\right\} \Rightarrow\; CF \perp QP \;\Rightarrow\; CF \text{ is middelloodlijn van } QP$$

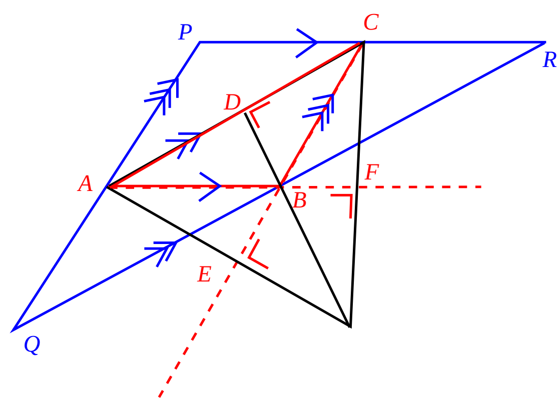
21e) Op gelijkewijze valt te bewijzen dat A het midden is van QR en dat $AD \perp QR$, verder valt te bewijzen dat B het midden is van PR en dat $BE \perp PR$...
Daarom is AD de middenlloodlijn van QR en BE de middenlloodlijn van PR.

21f) De hoogtelijnen in $\triangle ABC$snijden elkaar in *één* punt, omdat ze samenvallen met de middenlloodlijnen van $\triangle PQR$ en die snijden elkaar in *één* punt.

Schets bij Som 21)



Schetsje bij Som 22)



22)

$$\left.\begin{array}{l} AP \,||\, BC \\ AB \,||\, PC \end{array}\right\} \Rightarrow\; ABCP \text{ is een parallellogram} \Rightarrow\; PC = AB$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \,||\, CR \\ AC \,||\, BR \end{array}\right\} \Rightarrow\; ABRC \text{ is een parallellogram} \Rightarrow\; AB = CR$$

$$\xrightarrow{Dus} AB = PC = CR \;\Rightarrow\; CF \text{ is middelloodlijn van } PR$$

$$\left.\begin{array}{l} QB \,||\, AC \\ QA \,||\, BC \end{array}\right\} \Rightarrow\; QBCA \text{ is een parallellogram} \Rightarrow\; AC = QB$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \,||\, BR \\ AB \,||\, CR \end{array}\right\} \Rightarrow\; ABCR \text{ is een parallellogram} \Rightarrow\; AC = BR$$

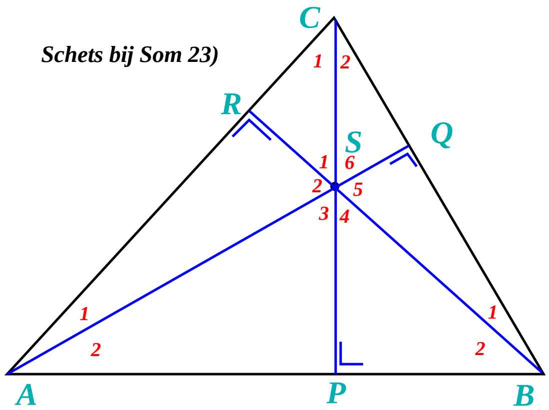
$$\xrightarrow{Dus} AC = QB = BR \;\Rightarrow\; DB \text{ is middelloodlijn van } QR$$

Zelfde verhaal voor $QBCA$ en $APCB$ de drie middelloodlijnen gaan door *één* punt,
dan gaan de hoogtelijnen ook door *één* punt.

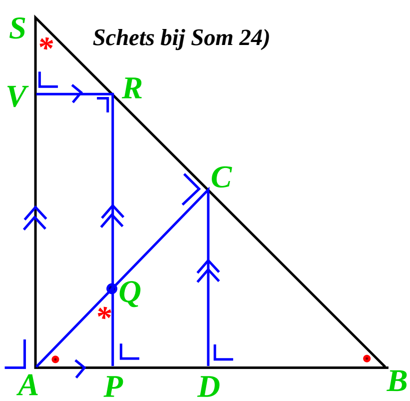
23)

$$\left.\begin{array}{r}\angle A+\angle C_1=90^o\\ \angle C_1+\angle S_1=90^o\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A=\angle S_1$$
$$\left.\begin{array}{r}\angle B+\angle A_2=90^o\\ \angle A_2+\angle S_3=90^o\end{array}\right\}\Rightarrow \angle B=\angle S_3$$
$$\left.\begin{array}{r}\angle C+\angle B_1=90^o\\ \angle B_1+\angle S_5=90^o\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C=\angle S_5$$
$$\left.\begin{array}{r}\angle S_1=\angle S_4\\ \angle S_3=\angle S_6\\ \angle S_5=\angle S_2\end{array}\right\}\leftrightsquigarrow Overstaande\ Hoeken$$
$$\xrightarrow{Dus}\left\{\begin{array}{l}\angle A=\angle S_1=\angle S_4\\ \angle B=\angle S_3=\angle S_6\\ \angle C=\angle S_5=\angle S_2\end{array}\right.$$

Schets bij Som 23)



Schets bij Som 24)



Gegeven : $AC=BC$ en zie figuur
Te bewijzen: $PQ+PR=2\cdot CD$

24a t/m e)

1) $\left.\begin{array}{r}AS\perp AB\\ PR\perp AB\\ CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle BDC\sim\triangle BPR\sim\triangle BAS$

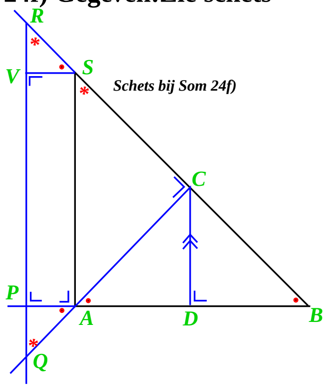
2) $AC=BC\ \Rightarrow\ \triangle ABC\ is\ Gelijkbenig\ \Rightarrow\ CD\ deelt\ AB\ Middendoor\ \Rightarrow\ AS=2\cdot CD$

3) $\left.\begin{array}{r}\angle B+\angle S=90^o\\ \triangle ABC\xrightarrow{Gelijkbenig}\angle B=\angle BAC\end{array}\right\}\Rightarrow \angle AQP=\angle S\ en\ \angle QAP=\angle SRV$

4) $\left.\left.\begin{array}{r}AP=VR\\ de\ 3\ hoeken\ van\ \triangle VRS\ en\ \triangle PAT\ zijn\ gelijk\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle VRS\cong\triangle PAQ\ \Rightarrow\ PQ=SV\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ SA=AV+SV\ \Rightarrow\ SA=PR+PQ\ \Rightarrow\ PQ+PR=2\cdot CD$

24f) Gegeven:Zie schets



te Bewijzen: $PQ+PR=2\cdot CD$

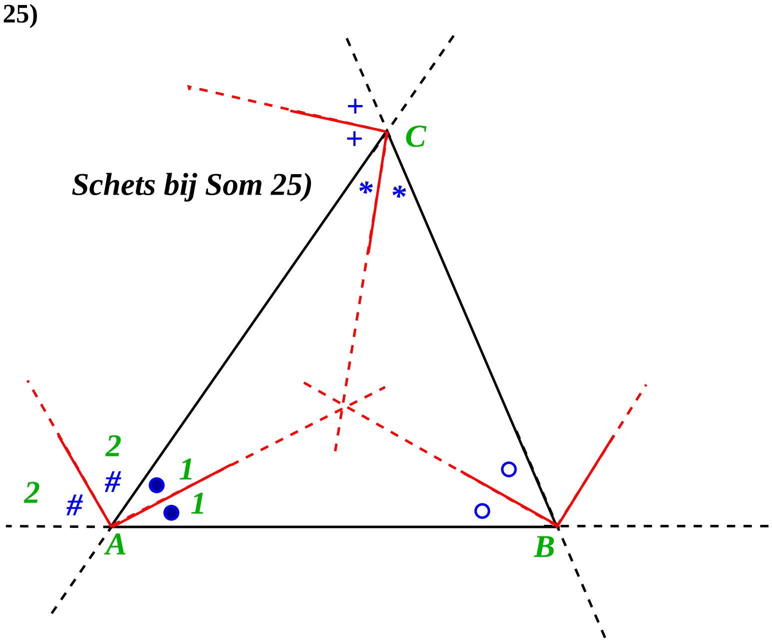
Bewijs: ① $AS=2\cdot CD \xleftarrow{Zie\ 24a)\ t/m\ 24e)}$

$$② \left\{\begin{array}{ll} \angle B=\angle DAC & (Gelijkbenige\ Driehoek) \\ \angle DAC=\angle QAP & (Overstaande\ Hoeken) \\ \angle PAQ+\angle PQA=90^o & \\ \angle ABC+\angle BRP=90^o & \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \angle PQA=\angle SRV \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \angle VSR=\angle PAQ \\ AP=VS \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle VSR\cong\triangle PAQ \Rightarrow PQ=VR \Rightarrow PQ+PR=PR-RV=2\cdot CD$$

KERN 3
DEELLIJNEN IN EN DRIEHOEK

25)



26) $\angle A_1+\angle A_1+\angle A_2+\angle A_2=180^o \xrightarrow{Gestrekte\,Hoek} \angle A_1+\angle A_2=90^o \;\Rightarrow$ binnen en buitenste deellijnen bij A staan loodrecht op elkaar. Op analoge wijze is de stelling te bewijzen voor de hoekpunten B en C

27a)

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel BE \;\Rightarrow\; \angle E=\angle C_1 \quad (F-hoek) \\ \angle C_3=180^o-2\cdot\angle C_1 \\ \angle C_3+\angle E+\angle B_1=180^o \end{array}\right\} \Rightarrow\; 180^o-2\cdot\angle C_1+\angle E+\angle B_1=180^o \;\Rightarrow$$

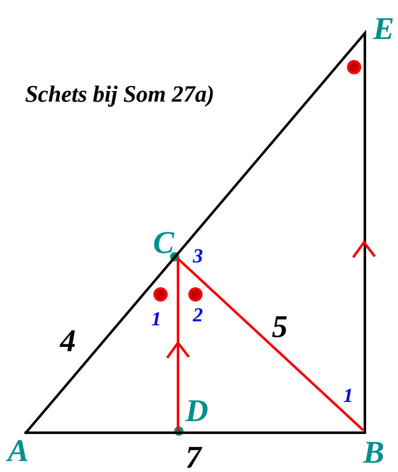
$\Rightarrow\; \angle E+\angle B_1=2\cdot\angle C_1 \Rightarrow\; \angle B_1=\angle C_1 \;\Rightarrow\; EC=5 \longrightarrow \triangle BCE\;\; is\, gelijkbenig$

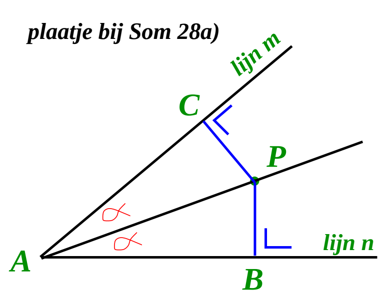
27b) $\triangle ADC \sim \triangle ABE \xleftarrow{Volgens\;Kenmerk\;hh}$

$\angle A$ is gemeenschappelijk $\angle ADC=\angle ABE \xleftarrow{F-Hoek}$

27c) Vergrotingsfactor $\frac{AE}{AC}=\frac{9}{4}$

27d) $AD\cdot\frac{9}{4}=7 \;\Rightarrow\; A=7\cdot\frac{4}{9}=\frac{28}{99} \;\Rightarrow\; A=3\frac{1}{9} \xrightarrow{en\;B=7-A} B=7-3\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; B=3\frac{8}{9}$





28a)

Gegeven: P ligt op de deellijn van A

te Bewijzen: $PB=PC$

Bewijs: zie ook plaatje

- **28a)** Teken de loodlijnen vanuit P op l en m

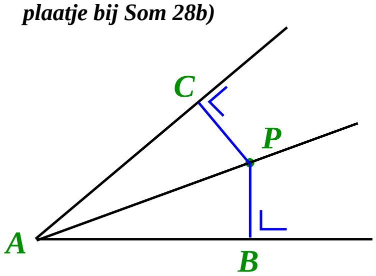
- Volgens **HHZ** $(90^o; \alpha; AP)$ **geldt** $\triangle ABP \cong \triangle ACP$
- Waaruit volgt: $PB = PC$

28b)
Gegeven: $PB = PC$
te Bewijzen: P ligt op deellijn van $\angle A$
Bewijs: zie ook plaatje

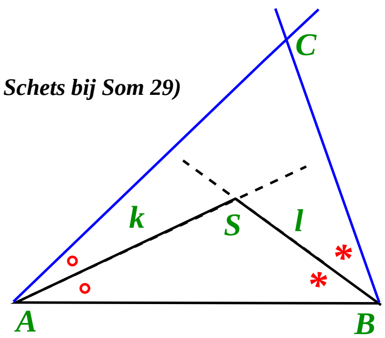
$$\left.\begin{array}{c} PB = PC \\ \angle ABP = \angle ACP \\ AP = AP \end{array}\right\} \xrightarrow{Volgens\ ZZR\ geldt} \triangle ABP \cong \triangle ACP \Rightarrow \angle BAP = \angle PAC \Rightarrow$$

P ligt op de deellijn van $\angle A$

plaatje bij Som 28b)



Schets bij Som 29)



29)
te Bewijzen: $\boxed{De\ Binnendeellijnen\ van\ een\ Driehoek\ snijden\ elkaar\ in\ één\ Punt}$
Bewijs:

- Zie plaatje: S ligt op de deellijn van $\angle A \Rightarrow d(S;AB) = d(S;AC)$①
- S ligt op de deellijn van $\angle B \Rightarrow d(S;AB) = d(S;BC)$②
- Uit ① *en* ② volgt: $d(S;AB) = d(S;AC) = d(S;BC) \longrightarrow S$ ligt op de deellijn $\angle C$

$d(A;B)$: afstand/distantie A en B

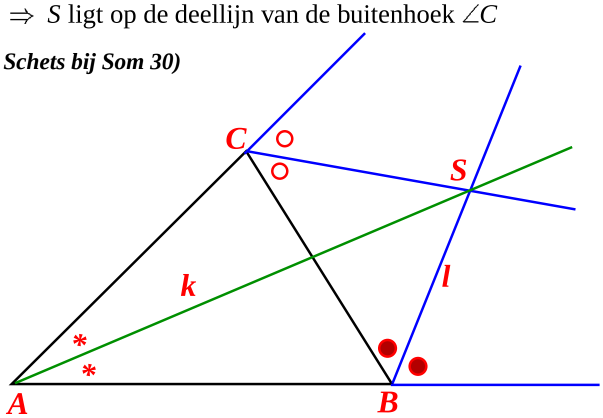
$\xrightarrow{Dus}$ de deellijnen van $\angle A, \angle B$ *en* $\angle C$ gaan door *één* Punt

30)
Gegeven: Deellijn van $\angle A$ is k Deellijn van Buitenhoek B is l; $l \cap k = S$
Zie ook plaatje
te Bewijzen: Deellijn van Buitenhoek van C gaat door S
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{ll} d(S;AB) = d(S,AC) & k\ is\ deellijn\ van\ \angle A \\ d(S;AB) = d(S;BC) & l\ is\ deellijn\ van\ buitenhoek\ van\ \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow d(S,AB) = d(S,AC) = d(S,BC) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ S ligt op de deellijn van de buitenhoek $\angle C$

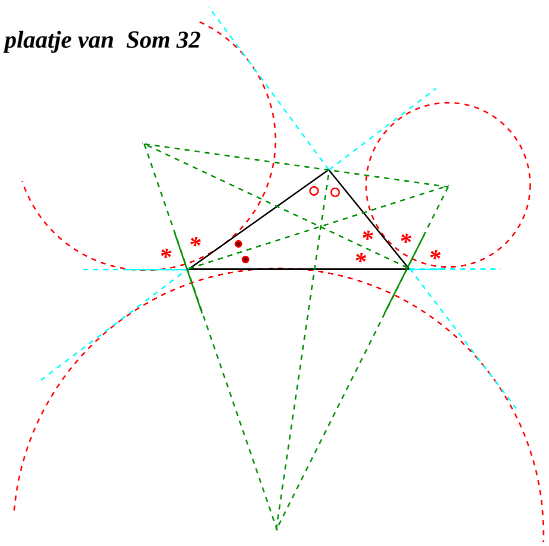
Schets bij Som 30)



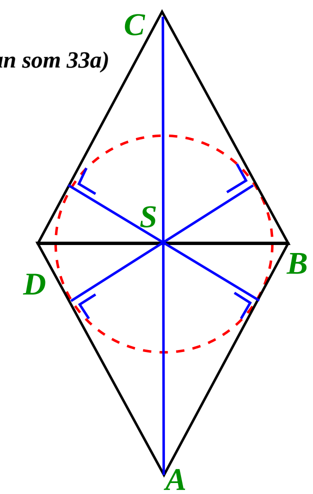
31) De loodlijnstukken zijn de afstanden van punt I naar de drie zijden:

$$\left.\begin{array}{lll} I \text{ op } k & \Rightarrow & IE = IF \\ I \text{ op } l & \Rightarrow & IE = ID \end{array}\right\} \Rightarrow ID = IE = IF$$

plaatje van Som 32



plaatje van som 33a)



33a) zie plaatje

33b)

Gegeven: $\begin{cases} DS = SB \\ CS = AS \\ AC \perp DB \end{cases}$

te Bewijzen: Vierhoek $ABCD$ heeft een ingeschreven cirkel

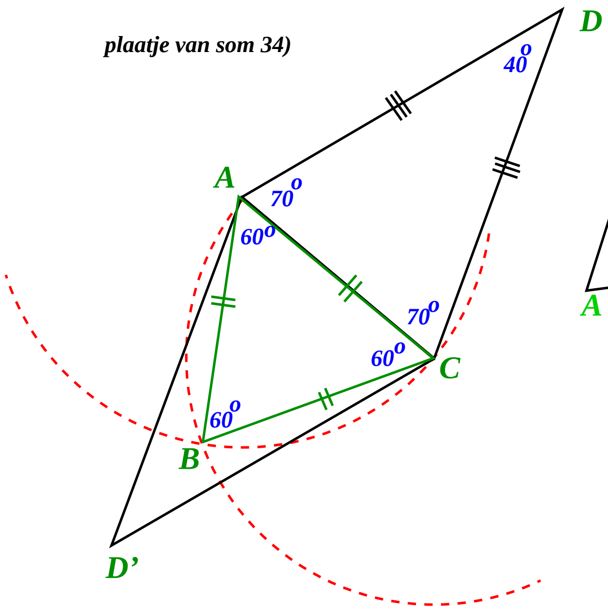
Bewijs: $\triangle ASD \cong \triangle ASB \cong \triangle CSD \cong \triangle CSB \xrightarrow{geval\ ZHZ}$ hoogtelijnstukken uit S zijn allemaal even lang $\Rightarrow$ Vierhoek $ABCD$ heeft een ingeschreven cirkel

33c) Neen, alleen als $CS = BS$

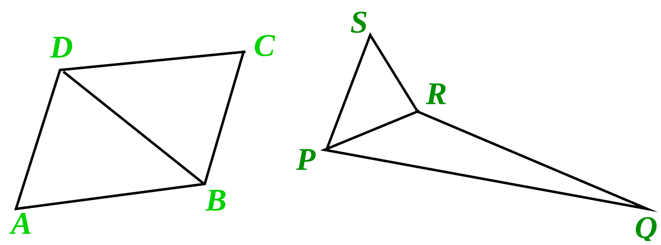
KERN 4
VEELHOEKEN

34a) $\boxed{Gelijkzijdige\ Driehoek : Alle\ Hoeken\ zijn\ 60^o}$
gelijkbenige Driehoek: $\angle DAC = \angle DCA = \frac{180^o - 40^o}{2} = 70^o$
Alle hoeken samen:$40^o + 60^o + 2 \cdot 130^o = 360^o$
34b)
De gespiegelde hoek $\angle D'$ is ook 40^o
De gespiegelde hoek $\angle A$ is ook $70^o \ \Rightarrow \ \angle D'AB = 70^o - 60^o = 10^o$
Dat geldt ook voor $\angle D'CB$
Samen zijn de hoeken: $40^o + 10^o + 300^o + 10^o = 360^o$

plaatje van som 34)



plaatje bij Som 35)



36) De som van de hoeken :

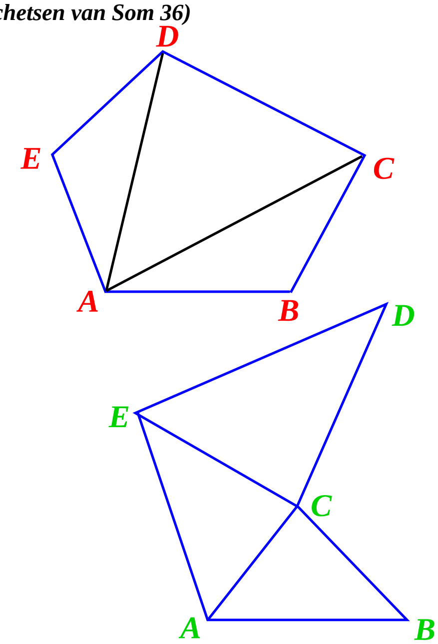
$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC &= 180^o \\ \triangle ACD &= 180^o \\ \triangle ADE &= 180^o \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{De Som van de hoeken}}$$

$$\triangle_{ABC} + \triangle_{ACD} + \triangle_{ADE} = 3 \cdot 180^o = 540^o$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC &= 180^o \\ \triangle ACE &= 180^o \\ \triangle ECD &= 180^o \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{De Som van de hoeken}}$$

$$\triangle_{ABC} + \triangle_{ACE} + \triangle_{ECD} = 3 \cdot 180^o = 540^o$$

Schetsen van Som 36)



37)

Gegeven: $\begin{cases} AS = SC \\ DS = BS \\ AS \neq DS \end{cases}$

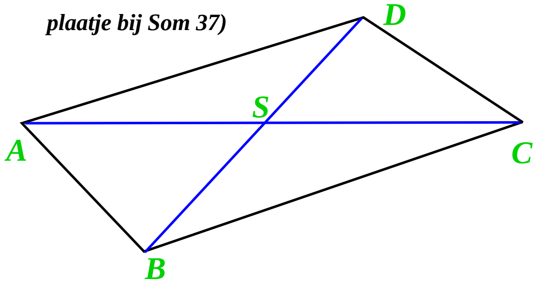
Stelling: De overstaande Zijden van $ABCD$ zijn Evenwijdig

Bewijs: $\triangle ABS \cong \triangle CDS \xleftarrow{Volgens\ ZHZ} \begin{cases} BS = SD \\ AS = CS \\ \angle ASB = \angle DSC \xleftarrow{Overstaande\ Hoeken} \end{cases} \Rightarrow \angle BAS = \angle SCD \longrightarrow$

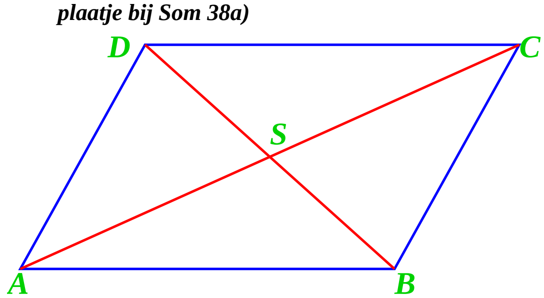
Zijn Z-hoeken $\Rightarrow$ $AB \parallel DC$

Analoog bewijs voor $AD \parallel DC$

plaatje bij Som 37)



plaatje bij Som 38a)



38a)

Gegeven: $ABCD$ is een parallelllogram$\longrightarrow$Overstaande zijden zijn Evenwijdig

te Bewijzen: $\boxed{Parallellogram: de\ Diagonale\ delen\ elkaar\ Doormidden}$

Bewijs:

$\left.\begin{array}{l} DC \parallel AB \\ AD \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \angle CAB = \angle ACD & (Z-hoek) \\ \angle DAC = \angle ACB & (Z-hoek \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle CAB \Rightarrow AD = BC\ en\ AB = DC$

$\triangle ASD \cong \triangle CSB \xrightarrow{Vlgs\ ZHZ\ en\ Z-hoeken\ AD=BC} AS = SC\ en\ DS = BS$

Conclusie: de diagonalen snijden elkaar middendoor

38b)

$\angle A = \angle BAS + \angle SAD = \angle SCD + \angle SCB = \angle C \xleftarrow{Z-hoeken}$

$\angle D = \angle ADS + \angle CDS = \angle SBC + \angle ABS = \angle B$

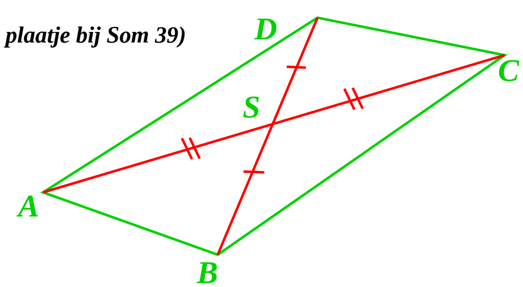
39)

Gegeven: $ABCD$ is een parallellogram; de diagonalen delen elkaar middendoor

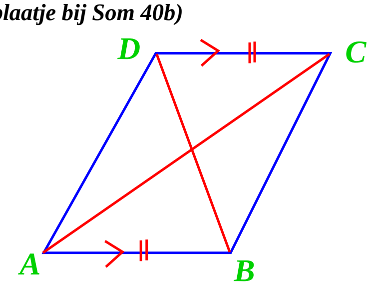
te Bewijzen: $\boxed{Parallellogram: Overstaande\ Zijden\ zijn\ Evenwijdig}$

Bewijs: Zie opgave 37....

plaatje bij Som 39)



plaatje bij Som 40b)



40a)
te Bewijzen A :twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig $\Rightarrow$ Beide paren overstaande zijden zijn evenwijdig **(Dus uit (3) volgt (1))**
te bewijzen B: Beide paren overstaande zijden zijn evenwijdig $\Rightarrow$ twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
(Dus uit (1) volgt (3))
40b) A

Gegeven: $\begin{cases} AB \,||\, DC \\ AB = DC \end{cases}$

te Bewijzen: $\begin{cases} AB \,||\, DC \\ AD \,||\, BC \end{cases}$

40c)
Bewijs:

$$AB \,||\, DC \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} \angle ABD = \angle BDC \;(Z - hoek) \\ AB = DC \\ BD = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle DBC \xrightarrow{Geval\ ZHZ} \angle ADB = \angle DBC \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; AD \,||\, BC$

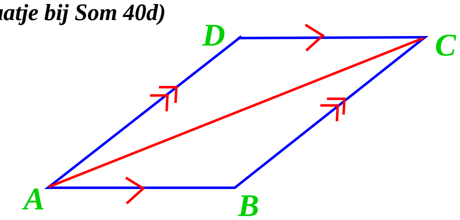
40d) B

Gegeven: $\begin{cases} AB \,||\, DC \\ AD \,||\, BC \end{cases}$

te Bewijzen: $\begin{cases} AB \,||\, DC \\ AB = DC \end{cases}$

Bewijs: $\left.\begin{array}{r} \angle CAB = \angle ACD \;(Z - hoeken) \\ \angle DAC = \angle ACB \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ACB \cong \triangle CAD \;\Rightarrow\; AB = CD$

plaatje bij Som 40d)



41)
We hebben bewezen dat:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\;\; Equivalent\ is\ met\;\; (2) \;\longrightarrow Opgave\, 38, 39 \\ (3)\;\; Equivalent\ is\ met\;\; (1) \;\longrightarrow Opgave\, 40 \end{array}\right\} \xrightarrow{Hieruit\, Volgt\ dat} (2)\ Equivalent\ is\ met\ (3)$$

42)
Als je van een vierhoek weet dat bijvoorbeeld de diagonalen elkaar middendoor snijden, is dit een kenmerk van en Parallellogram en mag je **Zonder Bewijs** gebruik maken van alle bekende eigenschappen van een Parallelllogram.
Samengevat zijn alle kenmerken van een Parallellogram:

- **Overstaande zijden zijn Evenwijdig**
- **Overstaande zijden zijn Evenlang**
- **Diagonalen snijden elkaar middendoor**

43a)
Gegeven: Parallellogram heeft *één* rechte hoek
te Bewijzen: andere hoeken zijn ook recht

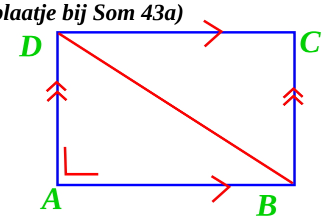
Bewijs: Overstaande zijden zijn evenwijdig $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle ABD = \angle BDC \\ \angle ADB = \angle DBC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C = 90^o$

$\xrightarrow{\text{hoekensom Driehoek}=180^o} \angle ABD + \angle CBD + \angle ADB + \angle BDC = 180^o \Rightarrow$

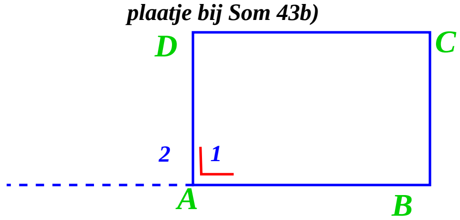
$\xrightarrow[(360^o-180^o=180^o)]{\text{hoekensom Vierhoek}=360^o} \angle ABD + \angle CBD + \angle ADB + \angle BDC = \angle ABD + \angle CBD + \angle CBD + \angle ABD =$

$= 2 \cdot \angle ABD + 2 \cdot \angle CBD = 180^o \Rightarrow \angle ABD + \angle CBD = 90^o \text{ en } \angle ADB + \angle BDC = 90^o$

plaatje bij Som 43a)



plaatje bij Som 43b)



43b)
Gegeven: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$
te Bewijzen: *ABCD* is een parallellogram
Bewijs:

$\angle A_1 = 90^o \Rightarrow \angle A_2 = 90^o \xleftarrow{\text{Gestrekte Hoek}}$

$\angle A_2 = \angle D \Rightarrow AB \,||\, DC \xleftarrow{Z-\text{Hoek}}$

$\angle A_2 = \angle B \Rightarrow AD \,||\, BC \xleftarrow{F-\text{Hoek}}$

44a)
(1) en **(2)** zijn Equivalent, want een vierhoek met vier rechte hoeken (90^o) is een parallellogram met een rechte hoek (zie opgave 43b)
en in een parallellogram met *één* rechte hoek zijn alle hoeken recht (zie opgave 43a)
44b)
Uit **(1)** volgt **(3) ,** want een vierhoek met vier rechte hoeken is een parallelllogram en

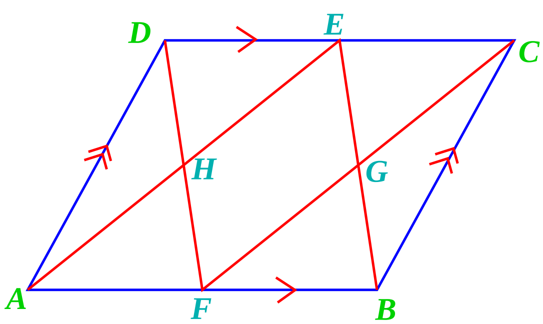
$\triangle ABD \cong \triangle ABC \overset{ZHZ}{\Rightarrow} AC = BD$

Uit (3) volgt (1), want *ABCD* is een parallellogram

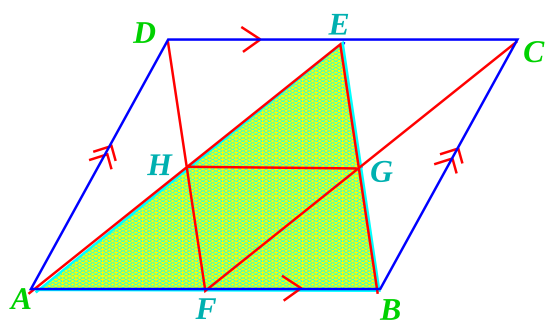
$\Rightarrow AB = DC \text{ en } AD = BC \xrightarrow{\text{Omdat}} AC = BD \text{ en } \triangle ABC \cong \triangle CDA \cong \triangle DCB \xleftarrow{ZZZ}$

$\longrightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D \xrightarrow{\text{Hoekensom Vierkant}=360^o} \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

plaatje bij Som 45a)



plaatje bij Som 45b)



45a)
zie ook plaatje

Gegeven: $\left\{ \begin{array}{c} ABCD \textit{ is een parallellogram} \\ E \textit{ is het Midden van } DC \\ F \textit{ is het midden van } AB \end{array} \right\}$
te bewijzen: $EHFG$ is een parallellogram
Bewijs:

- $\triangle ADE \cong \triangle CBF \xrightarrow[\angle D=\angle B \text{ en } AD=BC \text{ en } DE=BF]{Volgens\ ZHZ} \angle AED = \angle CFB$

  Omdat: $\angle FAE = \angle DEA \xleftarrow{Z-Hoek}$

  en dus uit: $\angle BFC = \angle FAE \xrightarrow{Volgt} AE \parallel FC \xrightarrow{gelijke\,F-Hoeken \Rightarrow Evenwijdige\,lijnen} HE \parallel FG$

- $\triangle AFD \cong \triangle CEB \xrightarrow{Geval\ ZHZ} \angle AFD = \angle CEB$

  Omdat: $\angle CEB = \angle FBE \xleftarrow{Z-Hoek}$

  en dus uit: $\angle AFD = \angle FBE \xrightarrow{Volgt} FD \parallel BE \xrightarrow{gelijke\,F-Hoeken \Rightarrow Evenwijdige\,lijnen} FH \parallel GE$

- **Conclusie**:$FEGH$ is een parallellogram (overstaande zijden evenwijdig)

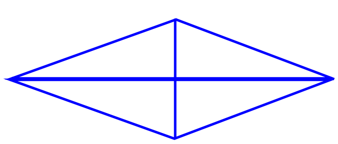
45b)
Gegeven: zie ook plaatje
te Bewijzen: $\triangle ABE \sim \triangle HGE$
Bewijs: $AFED$ en $FBCE$ zijn parallellogrammen $\Rightarrow$ $EH = HA \text{ en } EG = GB \xleftarrow{Diagonalen\ snijden\ elkaar\ middendoor}$
$\left\{ \begin{array}{c} EA \textit{ is dus een vergroting van } EH \textit{ met Factor } 2 \\ EB \textit{ is dus een vergroting van } EG \textit{ met Factor } 2 \\ \angle E \textit{ is gemeenschappelijk} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \overset{zhz}{\sim} \triangle HGE$

45c)
$FH = EH$ geldt alleen als de diagonalen FD en AE gelijk zijn
Dit is het geval als $\angle A = 90^o$

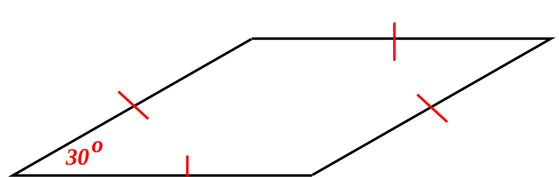
46) Gegevens volgens de figuur.
a) Te bewijzen: $FGEH$ is een parallellogram
Bewijs: Omdat alle hoeken recht zijn, is $ABCD$ een parallellogram. Het bewijs is verder letterlijk hetzelfde als bij opgave 45a)
b) Bewijs: $\triangle FAD \cong \triangle EAD$ (geval ZHZ) $\Rightarrow$ $FD = AE$ en $\angle FDA = \angle EAD$ $\Rightarrow$ $\triangle AHD$ is gelijkbenig, dus $HD = HA$.
In parallellogram $AFED$ snijden de diagonalen elkaar middendoor , dwz
$FH = HD$ en $EH = HA$
Omdat $HD = HA$ geldt dus $EH = FH$.
Omdat in een parallellogram overstaande zijden gelijk zijn, geldt dus dat alle zijden in parallellogram $FGEH$ gelijk zijn.
c) $FGEH$ is een vierkant als $\angle H = 90^o$. Dat is het geval als in de gelijkbenige driehoek $\triangle AHD$ de basishoeken 45^o zijn, en dat is het geval als $\triangle AFD$ en half vierkant is.
$FGEH$ is dus een vierkant als $AB = 2 \cdot AD$.

47a) neen
47b) ja

Schets bij Som 47)

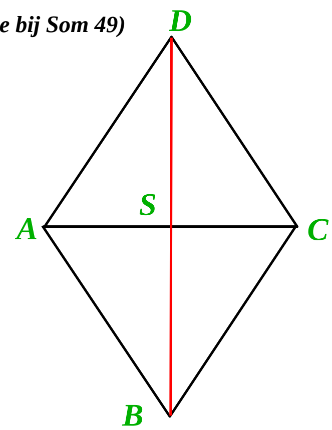


Som 48)



49) Zie ook schetsje

plaatje bij Som 49)



te Bewijzen:

(1) is equivalent met (2):

(1) $\Rightarrow$ (2)

We hebben een parallellogram met vier gelijke

zijden $\Rightarrow$ een parallellogram waarvan

een diagonaal een hoek middendoor deelt.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{cc} \triangle ABC \textit{ is gelijkbenig } \Rightarrow & \angle ABS - \angle ADS \\ \angle ABS = \angle CBS & (Z - hoek) \end{array}\right\} \Rightarrow BD \text{ deelt } \angle B \text{ middendoor}$$

$(2) \Rightarrow (1)$

Parallellogram waarvan de diagonaal een hoek middendoor deelt $\Rightarrow$ parallellogram met vier gelijke zijden

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{cc} \angle ABS = \angle CBS & (Z - hoeken) \\ \angle ABS = \angle CBS & (gegeven) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABD \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AB = AD$$

Omdat overstaande zijdenvan een parallellogram gelijk zijn volgt nu dat alle vier zijden gelijk zijn.

conclusie: (1) is equivalent met (2)

te Bewijzen: (1) is equivalent met (3)

$(1) \Rightarrow (3)$

parallellogram met vier gelijke zijden $\Rightarrow$ parallellogram met loodrechte snijdende diagonalen

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{cc} \triangle ABS \cong \triangle CBS & (volgens\ geval\ ZHZ) \\ (BA = BC & BS\ gemeenschappelijk) \\ \angle ABS = \angle CBS & (hierboven\ reeds\ Bewezen) \end{array}\right\} \Rightarrow AS = CS \Rightarrow BS \text{ is de middenloodlijn van } AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ASB = 90^o$$

Conclusie: AD snijdt BD loodrecht

$(3) \Rightarrow (1)$

parallellogram met loodrecht snijdende diagonalen $\Rightarrow$ parallellogram met vier gelijke zijden

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{c} AS = CS \\ BS = DS \\ Want\ in\ elke\ parallellogram\ snijdende\ diagonalen\ elkaar\ middendoor \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ASD \cong \triangle ASB \xrightarrow[BS=DS\ AS\ gemeenschappelijk,\ ,hoeken\ bij\ C\ zijn\ Recht]{volgens\ ZHZ} AD = BD$$

Omdat overstaande zijden van een parallellogram gelijk zijn, volgt nu dat alle vier zijden gelijk zijn.

Conclusie: (1) is equivalent met (3)

te bewijzen: (1) is equivalent met (4).

(1) $\Rightarrow$ (4)

parallellogram met vier gelijke zijden $\Rightarrow$ vierhoek met vier gelijke zijden.

Bewijs : triviaal.

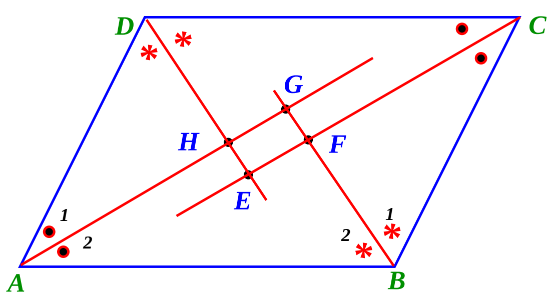
(4) $\Rightarrow$ (1)
vierhoek met vier gelijke zijden $\Rightarrow$ parallellogram met vier gelijke zijden.
Bewijs: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ volgens geval ZZZ $\Rightarrow$ $\angle BAC = \angle DCB$ $\Rightarrow$ $AB \parallel CD$ (Z-hoeken gelijk) en $\angle DAC = \angle BCA$ $\Rightarrow$ $AD \parallel BC$ (Z-hoeken gelijk).
Hieruit volgt dat $ABCD$ een parallellogram is.
Conclusie : (1) is equivalent met (4).
Hiermee is bewezen dat de vier definities onderling equivalent zijn, omdat (2), (3) en (4) allemaal equivalent zijn aan (1).

50)

a) Waar volgens definitie (1)
b) Niet waar.
c) Waar.
d) Waar.

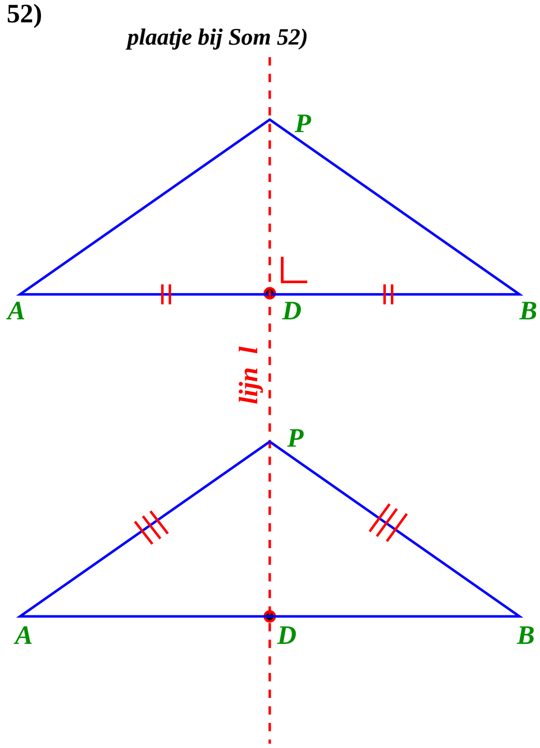
51)

plaatje bij Som 51)

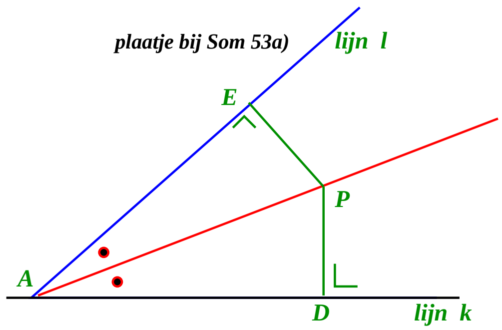


Gegevens volgens de figuur.
te bewijzen: $EFGH$ is een rechthoek.
Bewijs: $\angle G$ in $\triangle ABG$ is recht, want
$\angle DAB + \angle ABC = 180^o$ $(AD \parallel BC)$ $\Rightarrow$
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B_2 + \angle B_1 = 180^o$ $\Rightarrow$ $2 \cdot \angle A_2 + 2 \cdot \angle B_2 = 180^o$($AG$ en BG zijn deellijnen) $\Rightarrow$
$\angle A_2 + \angle B_2 = 90^o$ $\Rightarrow$ $\angle G = 90^o$ (hoekensom driehoek)
Analoog is te bewijzen dat de hoeken bij E, F en H recht zijn.
Vierhoek $EFGH$ is dus een rechthoek.

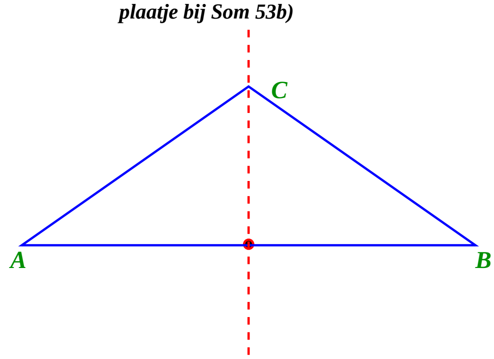
52)



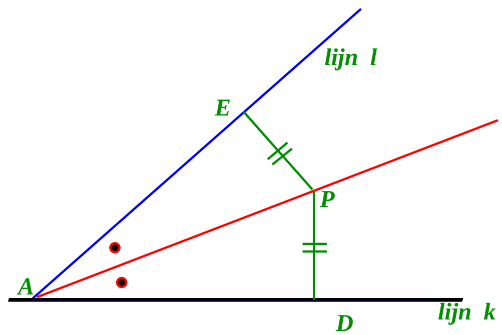
Te bewijzen: (1) $\Rightarrow$ (2) Dwz. voor elke P op l geldt dat $PA = PB$
Bewijs: $\triangle ADP \cong \triangle BDP$ volgens geval ZHZ ($AD = BD$,PD is gemeenschappelijk, de hoeken bij D zijn recht) $\Rightarrow$ $PA = PB$
Te bewijzen: (2) $\Rightarrow$ (1) Dwz. als voor elke P op l geldt dat $PA = PB$, dan snijdt l AB loodrecht middendoor.
Bewijs: D is het snijpunt van l met AB.
Dan geldt $DA = DB$, omdat D op l ligt.
Eerste conclusie: l snijdt AB middendoor.
P is een willekeurig punt op l .
$\triangle PAD \cong \triangle PBD$ volgens geval ZZZ ($PA = PB$, $DA = DB$ en PD is gemeenschappelijk)
Hieruit volgt dat $\angle PDA = \angle PDB$. Maar $\angle PDA + \angle PDB = 180^o$(gestrekte hoek)
$\Rightarrow$ $\angle PDA = 90^o$
Tweede conclusie: l snijdt AB loodrecht



plaatje bij Som 53a)



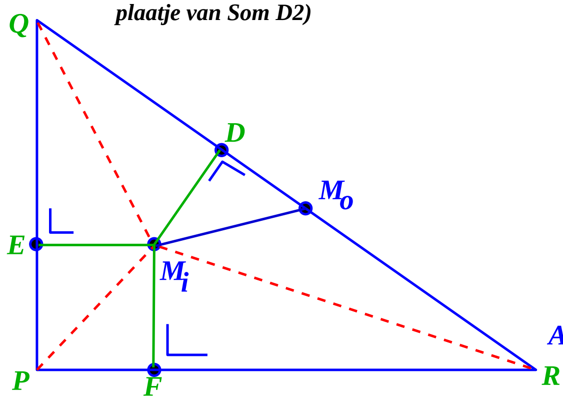
plaatje bij Som 53b)



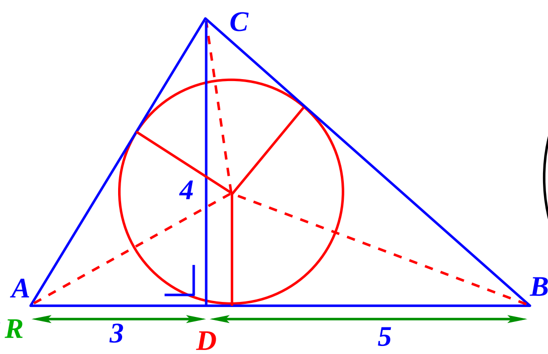
53a) Definities deellijn:
(1) Een deellijn van een hoek deelt de hoek in twee gelijke hoeken.
(2) Een deellijn van een hoek bevat punten die even ver liggen van de twee benen van de hoek.
Te bewijzen: (1) $\Rightarrow$ (2)
Bewijs: Laat Peen willekeurig punt op de deellijn van $\angle A$ zijn.
Teken $PD \perp k$ en $PE \perp l$.
$\triangle ADP \cong \triangle AEP$ volgens geval HHZ ($\angle DAP = \angle EAP, \angle D = \angle E$ en PA is gemeenschappelijk)
$\Rightarrow$ $PD = PE$, dwz. P ligt even ver van de twee benen.
Te bewijzen: (2) $\Rightarrow$ (1)
Bewijs: Laat P een punt zijn dat even ver ligt van de benen k en l van $\angle A$, dwz.
$PD = PE$ en de hoeken bij D en E zijn recht.
Teken lijn AP.
$\triangle ADP \cong \triangle AEP$ volgens geval ZZR ($PD = PE, AP$ gemeenschappelijk, hoeken bij D en E zijn recht) $\Rightarrow$ $\angle DAP = \angle EAP$ $\Rightarrow$ P ligt op de deellijn van $\angle A$.
b) Definities van een gelijkkbenige driehoek.
Een driehoek is gelijkbenig als
(1) Twee zijden gelijk zijn
(2) Twee hoeken gelijk zijn
(3) een hoekpunt ligt op de middelloodlijn van de overstaande zijde
(1) $\Rightarrow$ (2)
want als $CA = CB$ dan geldt: $\triangle ACB \cong \triangle BCA$ volgens geval ZHZ
Hieruit volgt dat $\angle CAB = \angle CBA$
(2) $\Rightarrow$ (1)
want als $\angle CAB = \angle CBA$ dan geldt:
$\triangle CAB \cong \triangle CBA$ volgens geval HZH $\Rightarrow$ $AC = AB$
(1) $\Rightarrow$ (3)
want als $CA = CB$ dan ligt per definitie C op de middelloodlijn van AB
(3) $\Rightarrow$ (1)
want als C op de middelloodlijn van AB ligt dan geldt per definitie dat $CA = CB$

HERHALING

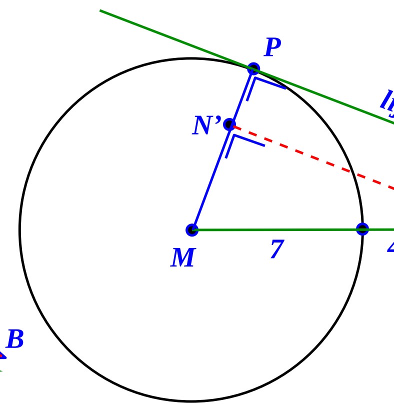
plaatje van Som D2)



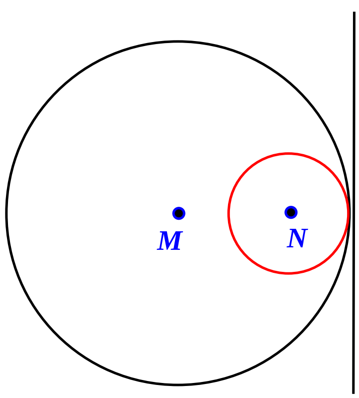
plaatje bij Som D4b)



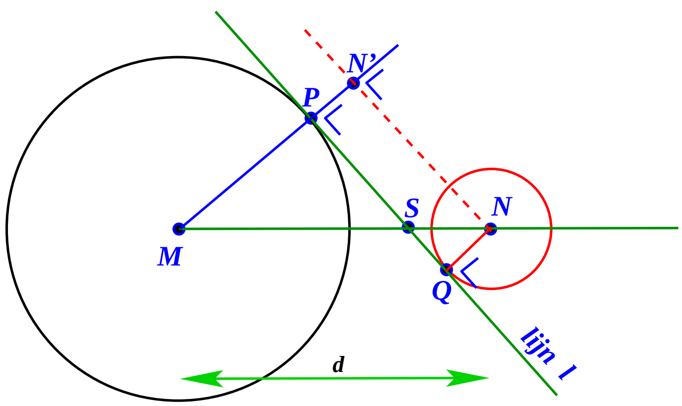
plaatje bij Som D5a)



plaatje bij Som D5c)

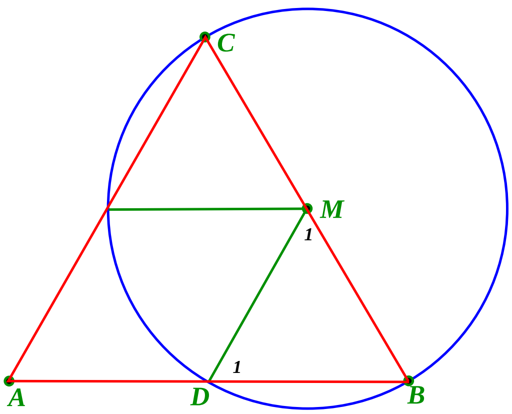


plaatje bij Som D6)

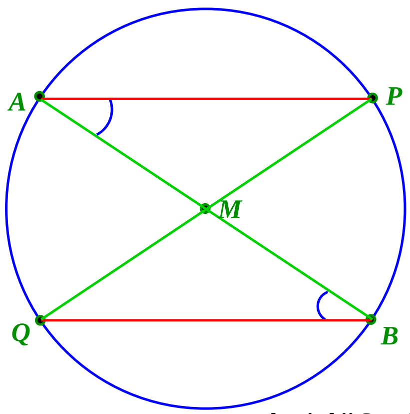


DoorWerking

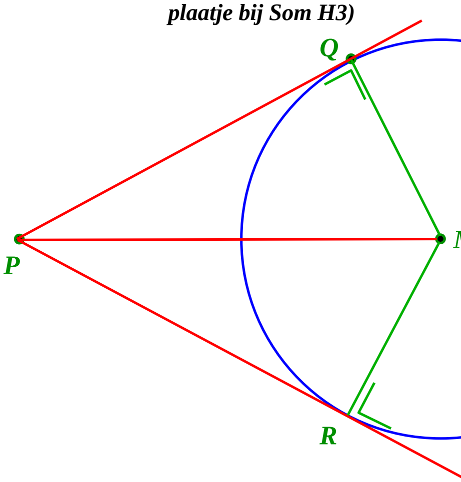
plaatje bij Som H1a)



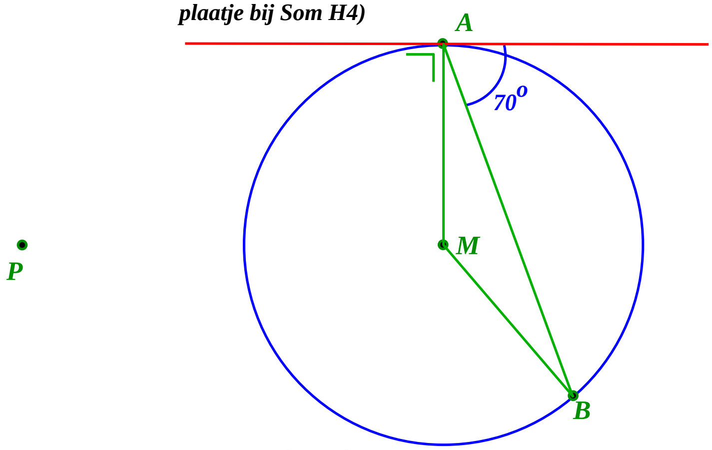
plaatje bij Som H2)



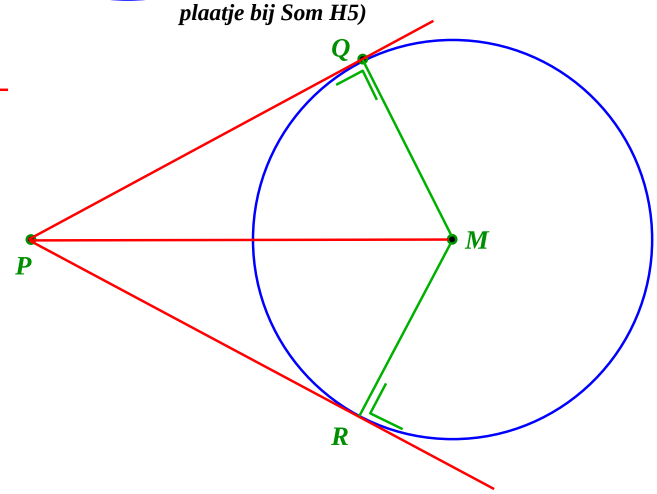
plaatje bij Som H3)



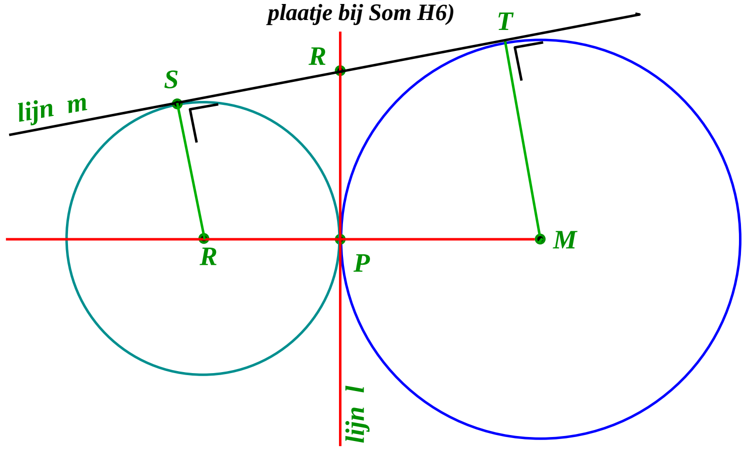
plaatje bij Som H4)



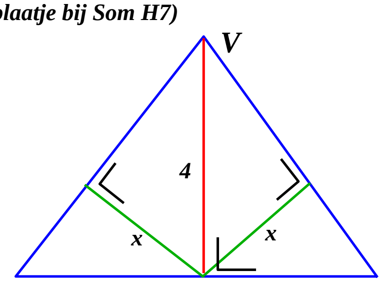
plaatje bij Som H5)



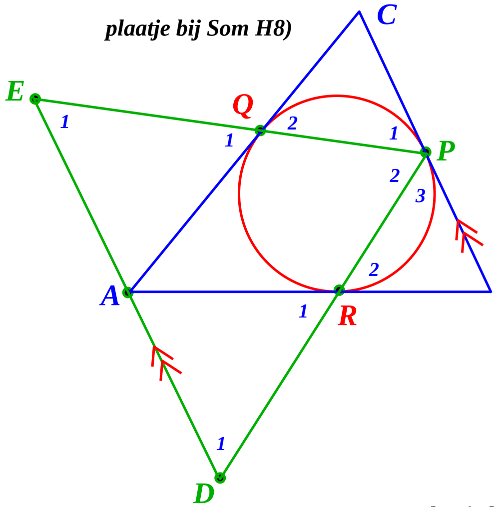
plaatje bij Som H6)



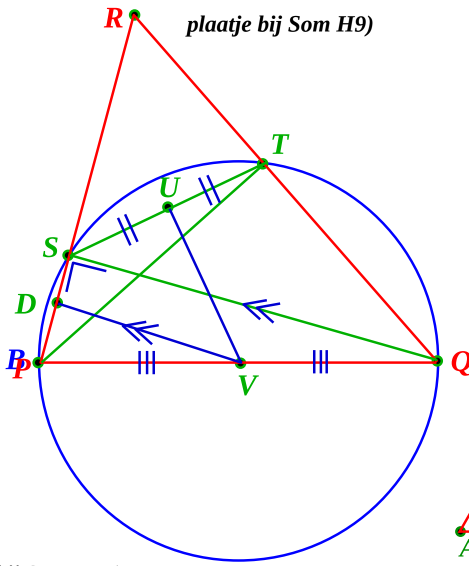
plaatje bij Som H7)



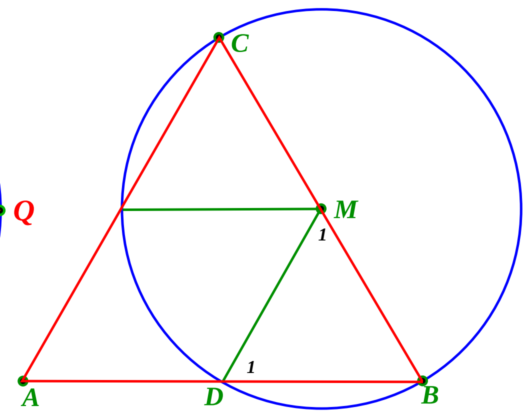
plaatje bij Som H8)



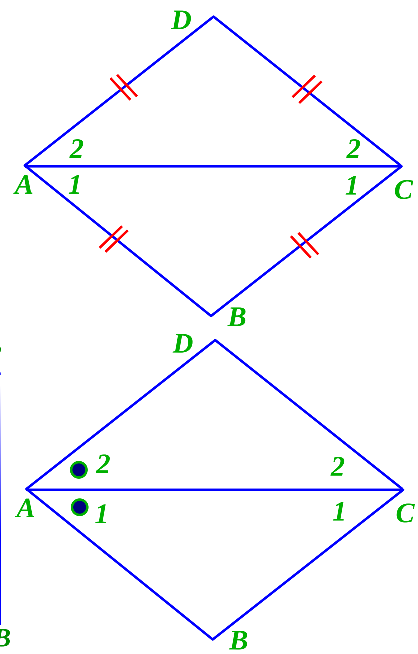
plaatje bij Som H9)



plaatje bij Som H1a)



plaatje bij Som H12)



plaatje bij Som H11)