b OPGAVE 56

$O = \frac{1}{2}x\sqrt{3600 - 120x}$

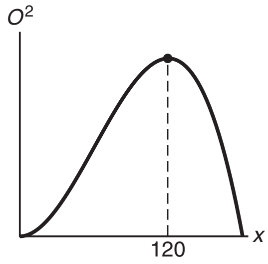
$O^2 = \frac{1}{4}x^2(3600 - 120x) = 900x^2 - 30x^3$

$\frac{\mathrm{d}(O^2)}{\mathrm{d}x} = 1800x - 90x^2$

$\frac{\mathrm{d}(O^2)}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $x(1800 - 90x) = 0$

$x = 0 \vee x = \frac{1800}{90} = 20.$

O^2 is maximaal als $x = 20$,
dus O is maximaal als $x = 20$.



OPGAVE 57

$O = \frac{1}{2}x\sqrt{400 - 40x}$

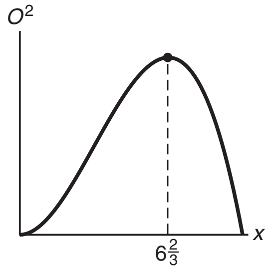
$O^2 = \frac{1}{4}x^2(400 - 40x) = 100x^2 - 10x^3$

$\frac{\mathrm{d}(O^2)}{\mathrm{d}x} = 200x - 30x^2$

$\frac{\mathrm{d}(O^2)}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $x(200 - 30x) = 0$

$x = 0 \vee x = \frac{200}{30} = 6\frac{2}{3}.$

O^2 is maximaal als $x = 6\frac{2}{3}$,
dus O is maximaal als $x = 6\frac{2}{3}$.



Diagnostische toets

bladzijde 36

1 a $f(x) = x^3(2x + 1)$ geeft

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^3]' \cdot (2x + 1) + x^3 \cdot [2x + 1]' \\ &= 3x^2 \cdot (2x + 1) + x^3 \cdot 2 \\ &= 3x^2(2x + 1) + 2x^3 \end{aligned}$$

b $g(x) = (x^2 - 2)(3x^2 + 4)$ geeft

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x^2 - 2]' \cdot (3x^2 + 4) + (x^2 - 2) \cdot [3x^2 + 4]' \\ &= 2x \cdot (3x^2 + 4) + (x^2 - 2) \cdot 6x \\ &= 2x(3x^2 + 4) + 6x(x^2 - 2) \end{aligned}$$

c $h(x) = (x^2 - 4)^2 = (x^2 - 4)(x^2 - 4)$ geeft

$$\begin{aligned} h'(x) &= [x^2 - 4]' \cdot (x^2 - 4) + (x^2 - 4) \cdot [x^2 - 4]' \\ &= 2x \cdot (x^2 - 4) + (x^2 - 4) \cdot 2x \\ &= 4x(x^2 - 4) \end{aligned}$$

2 a $f(x) = x^2(3x - 4)$ geeft

$f'(x) = 2x \cdot (3x - 4) + x^2 \cdot 3 = 2x(3x - 4) + 3x^2$

Stel raaklijn $k: y = ax + b$

$a = f'(-1) = 2 \cdot -1(3 \cdot -1 - 4) + 3 \cdot (-1)^2 = 17$

dus $k: y = 17x + b$

$y_A = f(-1) = (-1)^2(3 \cdot -1 - 4) = -7$, dus $A(-1, -7)$

Vul $A(-1, -7)$ in bij $\begin{aligned} y &= 17x + b \\ -7 &= 17 \cdot -1 + b \\ 10 &= b \end{aligned}$

Dus $k: y = 17x + 10$.

b Als de grafiek van f een top heeft voor $x = 1$, dan is $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 2 \cdot 1(3 \cdot 1 - 4) + 3 \cdot 1^2 = 1$

Dus heeft de grafiek van f geen top voor $x = 1$.

c $f(x) = 0$ geeft $\begin{aligned} &x^2(3x - 4) = 0 \\ &x^2 = 0 \vee 3x - 4 = 0 \\ &x = 0 \vee x = 1\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

Dus $B(1\frac{1}{3}, 0)$.

Stel raaklijn in B is $l: y = ax + b$.

$a = f'(1\frac{1}{3}) = 2 \cdot 1\frac{1}{3}(3 \cdot 1\frac{1}{3} - 4) + 3 \cdot (1\frac{1}{3})^2 = 5\frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} \text{dus } l: y = 5\frac{1}{3}x + b \\ B(1\frac{1}{3}, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 = 5\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} + b \\ -7\frac{1}{9} = b \end{array}$

Dus $l: y = 5\frac{1}{3}x - 7\frac{1}{9}$.

3 a $A(-1, 0), B(p, 0)$, dus $AB = p + 1$

$BC = y_C = -p^2 + 3p + 4$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\begin{aligned} O &= \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \\ &= \tfrac{1}{2}(p + 1)(-p^2 + 3p + 4) \\ &= (\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2})(-p^2 + 3p + 4) \end{aligned}$

b Berekening van x_{top}: $[-x^2 + 3x + 4]' = -2x + 3 = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$, dus $x_{\text{top}} = 1\frac{1}{2}$.

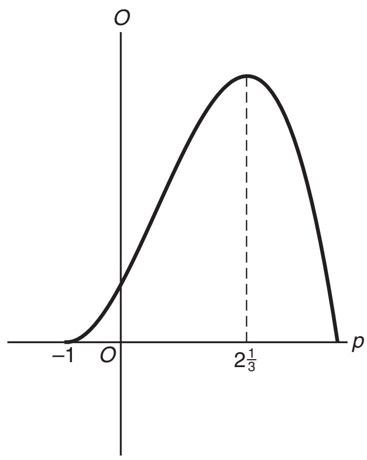
$O(1\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(-(1\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} + 4) = 7\frac{13}{16}$

Omdat bijvoorbeeld $O(2) = 9$ is O niet maximaal voor $p = 1\frac{1}{2}$.

c $O(p) = (\frac{1}{2}p + \frac{1}{2})(-p^2 + 3p + 4)$ geeft

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dp} &= \tfrac{1}{2}(-p^2 + 3p + 4) + (\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2})(-2p + 3) \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2 + 1\tfrac{1}{2}p + 2 - p^2 + 1\tfrac{1}{2}p - p + 1\tfrac{1}{2} \\ &= -1\tfrac{1}{2}p^2 + 2p + 3\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{dO}{dp} = 0 \text{ geeft } \begin{aligned} &-1\tfrac{1}{2}p^2 + 2p + 3\tfrac{1}{2} = 0 \\ &-3p^2 + 4p + 7 = 0 \\ &D = 4^2 - 4 \cdot -3 \cdot 7 = 100 \\ &p = \frac{-4 + \sqrt{100}}{-6} \vee p = \frac{-4 - \sqrt{100}}{-6} \\ &p = -1 \qquad\qquad \vee p = 2\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$



In de schets van de grafiek van O als functie van p is te zien dat O maximaal is voor $p = 2\frac{1}{3}$.

4 a $f(x) = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$ geeft $f'(x) = -12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$

b $g(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^3} = 4x^3 - 3x^{-3}$ geeft $g'(x) = 12x^2 + 9x^{-4} = 12x^2 + \frac{9}{x^4}$

c $h(x) = \frac{2x^3 - 3}{x^3} = \frac{2x^3}{x^3} - \frac{3}{x^3} = 2 - 3x^{-3}$ geeft $h'(x) = 9x^{-4} = \frac{9}{x^4}$

d $k(x) = \frac{6 - x^2}{x} = \frac{6}{x} - \frac{x^2}{x} = 6x^{-1} - x$ geeft $k'(x) = -6x^{-2} - 1 = -\frac{6}{x^2} - 1$

e $l(x) = \frac{1}{3x^6} = \frac{1}{3}x^{-6}$ geeft $l'(x) = -2x^{-7} = -\frac{2}{x^7}$

f $m(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = x + 2 + x^{-1}$ geeft $m'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

5 a $\frac{x+1}{x} = \frac{2}{3}$ geeft $(x+1) \cdot 3 = x \cdot 2$

$3x + 3 = 2x$

$x = -3$

b $\frac{6}{x^2} = \frac{2x}{9}$ geeft $x^2 \cdot 2x = 6 \cdot 9$

$2x^3 = 54$

$x^3 = 27$

$x = 3$

c $\frac{-3}{x^2} = -\frac{1}{3}$

$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{3}$ geeft $x^2 \cdot 1 = 3 \cdot 3$

$x^2 = 9$

$x = -3 \vee x = 3$

6 a $f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{x} = 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 5x^{1\frac{1}{2}} = 5x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5x\sqrt{x}$

b $g(x) = (x+4)\sqrt{x}$ geeft

$g'(x) = [x+4]' \cdot \sqrt{x} + (x+4) \cdot [\sqrt{x}]'$

$= 1 \cdot \sqrt{x} + (x+4) \cdot [x^{\frac{1}{2}}]'$

$= \sqrt{x} + (x+4) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{x} + \frac{x+4}{2\sqrt{x}}$

Anders:

$g(x) = (x+4)\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = \frac{x+4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-1\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{3x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{3x\sqrt[3]{x}}$

7 a $y = 3(x^2 + 4x)^4$

Stel $y = 3u^4$ met $u = x^2 + 4x$

$\frac{dy}{du} = [3u^4]' = 12u^3$ en $\frac{du}{dx} = [x^2 + 4x]' = 2x + 4$

$f'(x) = 12u^3 \cdot (2x + 4) = 12(x^2 + 4x)^3(2x + 4)$

b $y = \sqrt{x^2 + 2}$

Stel $y = \sqrt{u}$ met $u = x^2 + 2$.

$\dfrac{dy}{du} = [\sqrt{u}]' = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dx} = [x^2 + 2]' = 2x$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

c Eerst de afgeleide van $y = \sqrt{2 - x}$

Stel $y = \sqrt{u}$ met $u = 2 - x$.

$\dfrac{dy}{du} = [\sqrt{u}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dx} = [2 - x]' = -1$

Dus is $[\sqrt{2 - x}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot -1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}} \cdot -1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}}$

$k(x) = x\sqrt{2 - x}$ geeft

$$\begin{aligned} k'(x) &= [x]' \cdot \sqrt{2 - x} + x \cdot [\sqrt{2 - x}]' \\ &= 1 \cdot \sqrt{2 - x} + x \cdot -\frac{1}{2\sqrt{2 - x}} \\ &= \sqrt{2 - x} - \frac{x}{2\sqrt{2 - x}} \end{aligned}$$

bladzijde 37

8 a Eerst de afgeleide van $y = \sqrt{50 - x^2}$

Stel $y = \sqrt{u}$ met $u = 50 - x^2$.

$\dfrac{dy}{du} = [\sqrt{u}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dx} = [50 - x^2]' = -2x$

$[\sqrt{50 - x^2}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot -2x = \dfrac{1}{2\sqrt{50 - x^2}} \cdot -2x = -\dfrac{x}{\sqrt{50 - x^2}}$

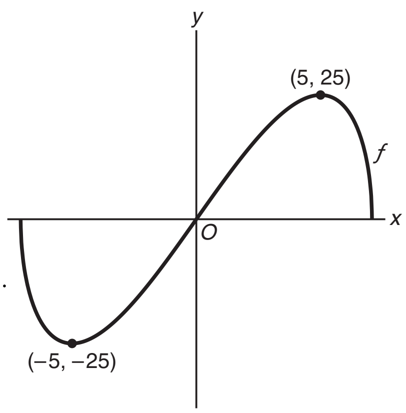
$f(x) = x\sqrt{50 - x^2}$ geeft

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x]' \cdot \sqrt{50 - x^2} + x \cdot [\sqrt{50 - x^2}]' \\ &= 1 \cdot \sqrt{50 - x^2} + x \cdot -\frac{x}{\sqrt{50 - x^2}} \\ &= \sqrt{50 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{50 - x^2}} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ geeft $\sqrt{50 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{50 - x^2}} = 0$

$$\frac{\sqrt{50 - x^2}}{1} = \frac{x^2}{\sqrt{50 - x^2}} \quad \text{kruiselings vermenigvuldigen}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{50 - x^2})^2 &= x^2 \\ 50 - x^2 &= x^2 \\ 50 &= 2x^2 \\ 25 &= x^2 \\ x = -5 &\vee x = 5 \end{aligned}$$



$f(-5) = -25, f(5) = 25$

De toppen van de grafiek van f zijn $(-5, -25)$ en $(5, 25)$.

b Stel de raaklijn $k\colon y = ax + b$

$a = f'(1) = \sqrt{50 - 1^2} - \dfrac{1^2}{\sqrt{50 - 1^2}} = 6\frac{6}{7}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{dus } k\colon y = 6\frac{6}{7}x + b \\ \quad y_A = f(1) = 1 \cdot \sqrt{50 - 1^2} = 7 \\ \quad \text{dus } A(1, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 = 6\frac{6}{7} \cdot 1 + b \\ \frac{1}{7} = b \end{array}$$

dus $k\colon y = 6\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$

c $50 - x^2 \geqq 0$, dus $-x^2 \geqq -50$

$x^2 \leqq 50$

$-\sqrt{50} \leqq x \leqq \sqrt{50}$

$D_f = [-\sqrt{50}, \sqrt{50}]$

$B_f = [-25, 25]$

9 a De oppervlakte van $OABC$ is $OA \cdot AB = p\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}$.

b Eerst de afgeleide van $\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}$.

Stel $y = \sqrt{u}$ met $u = 25 - \frac{1}{4}p^2$.

$\dfrac{dy}{du} = [\sqrt{u}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dp} = [25 - \frac{1}{4}p^2] = -\frac{1}{2}p$

$[\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot -\frac{1}{2}p = \dfrac{1}{2\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}} \cdot -\frac{1}{2}p = -\dfrac{p}{4\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}}$

Nu de oppervlaktefunctie differentiëren.

$$[p\sqrt{25 - \tfrac{1}{4}p^2}]' = [p]' \cdot \sqrt{25 - \tfrac{1}{4}p^2} + p \cdot [\sqrt{25 - \tfrac{1}{4}p^2}]'$$

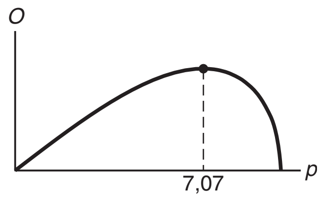
$$= \sqrt{25 - \tfrac{1}{4}p^2} + p \cdot -\frac{p}{4\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}}$$

$$= \sqrt{25 - \tfrac{1}{4}p^2} - \frac{p^2}{4\sqrt{25 - \frac{1}{4}p^2}}$$

Voer in $y_1 = \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2} - \dfrac{x^2}{4\sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2}}$.

De optie zero of Root geeft $x \approx 7{,}07$.

Dus de oppervlakte van $OABC$ is maximaal voor $p \approx 7{,}07$.



10 De lengte L van lijnstuk AB is

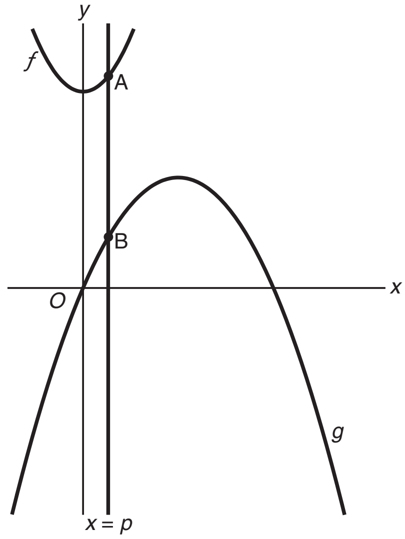
$$\begin{aligned} L(p) &= f(p) - g(p) \\ &= 2p^2 + 4 - (-p^2 + 3p) \\ &= 2p^2 + 4 + p^2 - 3p \\ &= 3p^2 - 3p + 4 \end{aligned}$$

$\dfrac{dL}{dp} = [3p^2 - 3p + 4]' = 6p - 3$

$\dfrac{dL}{dp} = 0$ geeft $6p - 3 = 0$

$p = \frac{1}{2}$

De minimale lengte van lijnstuk AB is $L(\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{4}$.



11 a $AC = 20 - AB = 20 - x$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + (20 - x)^2 = x^2 + 400 - 40x + x^2$

$\quad = 2x^2 - 40x + 400$

De oppervlakte van O van vijfhoek $ABEDC$ is de som van de oppervlakte van $\triangle ABC$ en de oppervlakte van vierkant $BEDC$.

$O = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC + BC^2$

$\quad = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (20 - x) + 2x^2 - 40x + 400$

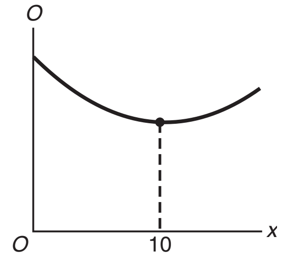
$\quad = 10x - \frac{1}{2}x^2 + 2x^2 - 40x + 400$

$\quad = 1\frac{1}{2}x^2 - 30x + 400$

b $\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = [1\frac{1}{2}x^2 - 30x + 400]' = 3x - 30$

$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $3x - 30 = 0$, dus $x = 10$

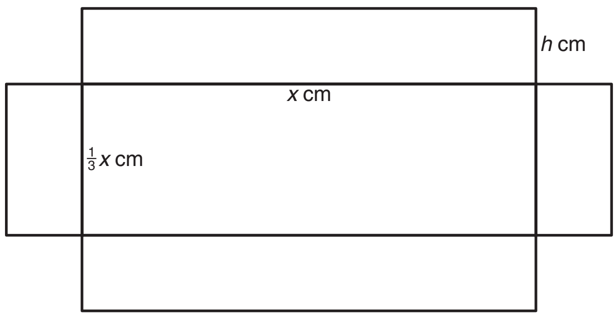
De oppervlakte van de vijfhoek is minimaal voor $x = 10$.



12 a Lengte x cm, breedte $\frac{1}{3}x$ cm.

Stel de hoogte h cm.

De inhoud is 3 liter = 3000 cm^3.



$x \cdot \frac{1}{3}x \cdot h = 3000$

$h = \frac{3000}{\frac{1}{3}x^2}$

$h = \frac{9000}{x^2}$ cm

De totale oppervlakte van de doos is

$O = \frac{1}{3}x \cdot x + 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot h$

$\quad = \frac{1}{3}x^2 + 2\frac{2}{3} \cdot x \cdot h$

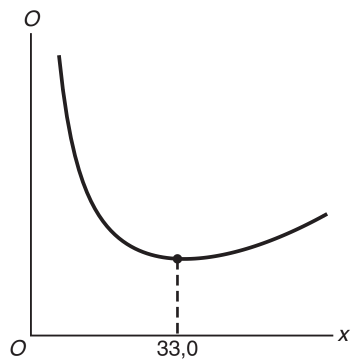
$\quad = \frac{1}{3}x^2 + 2\frac{2}{3}x \cdot \frac{9000}{x^2}$

$\quad = \frac{1}{3}x^2 + \frac{24\,000}{x}$

b Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{24\,000}{x}$

De optie minimum geeft $x \approx 33{,}0$.

Lengte, breedte en hoogte zijn 33,0 cm, 11,0 cm en 8,3 cm.

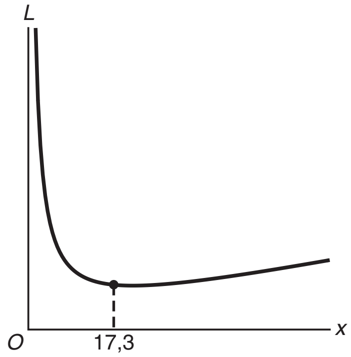


13 a De oppervlakte van het stuk land is $x \cdot y = 1200$, dus $y = \frac{1200}{x}$.
De totale lengte L van de afrastering is

$L(x) = 4x + y = 4x + \frac{1200}{x}$.

Voer in $y_1 = 4x + \frac{1200}{x}$.

De optie minimum geeft $x \approx 17{,}3$.
De afmetingen zijn 17,3 bij 69,3 m.



b De totale kosten K van de afrastering zijn

$$\begin{aligned} K(x) &= (2x + y) \cdot 60 + 2x \cdot 20 \\ &= 120x + 60y + 40x \\ &= 160x + 60y \\ &= 160x + 60 \cdot \frac{1200}{x} \\ &= 160x + \frac{72\,000}{x} \end{aligned}$$

De optie minimum geeft $x \approx 21{,}2$.
De afmetingen zijn 21,2 bij 56,6 m.